collana **SCHAUM**
teoria e problemi

MATRICI

Frank AYRES Jr.

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

$$= \begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= X'AY$$

340 problemi risolti

ETAS LIBRI

Titolo originale: Matrices
Editore originale: McGraw-Hill Book Company, New York
Traduzione dall'inglese di Walter Molon

ISBN 88-453-0006-4

Prima edizione italiana: maggio 1974

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Indice

Introduzione

L'algebra elementare delle matrici è diventata ormai parte integrante delle basi matematiche richieste nei campi più svariati: ingegneria e ricerca elettrotecnica; chimica, sociologia, statistica e matematica pura.

Questo libro presenta ciò che dell'argomento è essenziale; esso è inteso principalmente a costituire un'utile integrazione dei testi correnti e un comodo manuale di riferimento per quanti lavorano nei diversi rami per i quali è necessaria una certa conoscenza della teoria delle matrici. Possiamo anzi dire che l'esposizione delle teorie e dei principi è abbastanza completa, perché il libro possa essere usato come testo a sé stante.

La materia è stata suddivisa in ventisei capitoli, dal momento che tale ripartizione non ne compromette la sistematicità e il logico sviluppo, mentre nel contempo accresce la praticità dell'opera come testo di consultazione. Si può inoltre così separare la trattazione delle matrici reali, che interessa la maggior parte dei lettori, da quella delle matrici con elementi complessi.

Ogni capitolo consta di una esposizione di definizioni pertinenti, principi e teoremi, esaurientemente illustrati con esempi, seguiti a loro volta da un accurato assortimento di esercizi risolti e da un buon numero di esercizi integrativi.

Chi comincia a studiare l'algebra delle matrici si accorge ben presto che le soluzioni degli esercizi numerici sono estremamente semplici. Le difficoltà insorgeranno probabilmente quando il lettore si troverà di fronte alla continua successione di definizioni, teoremi, dimostrazioni. Qui il guaio va individuato essenzialmente nella mancanza di maturità matematica. Di solito c'è da aspettarsela, perché la precedente esperienza dello studente non è andata quasi mai oltre la soluzione di problemi numerici, mentre una chiara esposizione di principi e la dimostrazione di teoremi vengono in gran parte rimandate a corsi più avanzati.

Scopo di questo libro è di rendere il lettore, se avrà la costanza di seguire attentamente i paragrafi introduttivi e gli esercizi risolti di ogni capitolo, capace di acquisire un grado ragionevole di sicurezza sull'argomento.

Gli esercizi già risolti, oltre a dare una maggiore varietà agli esempi di applicazione dei teoremi, contengono la maggior parte delle dimostrazioni di una certa lunghezza, nonché alcune altre più brevi ma significative.

Gli esercizi integrativi richiedono sia soluzioni di esercizi numerici che dimostrazioni. Di queste ultime, alcune esigono solo una modifica opportuna di dimostrazioni già date; più importanti sono comunque i numerosi teoremi, le cui dimostrazioni si possono sviluppare in poche righe. Alcuni sono del tipo che spesso vien definito impropriamente "ovvio", mentre altri richiederanno una notevole dose di ingegnosità.

Nessuno di essi, tuttavia, dovrà esser preso alla leggera; perché è proprio per l'abbondanza di simili teoremi che l'algebra elementare delle matrici diventa un "ovvio" corso introduttivo per chi vuol raggiungere un certo livello di maturità matematica. Il numero di questi problemi, notevole in ogni capitolo, renderà forse poco pratico risolverli tutti prima di passare ai successivi; occorrerà tuttavia dedicare speciale attenzione agli esercizi integrativi dei primi due capitoli. La padronanza di questi sarà molto utile per dare al lettore fiducia in se stesso nell'affrontare il seguito.

L'autore desidera cogliere l'opportunità di esprimere la propria gratitudine al gruppo di lavoro della Schaum Publishing Company, per la collaborazione.

FRANK AYRES, Jr.

Introduzione

L'algebra elementare delle matrici è diventata ormai parte integrante delle basi matematiche richieste nei campi più svariati: ingegneria e ricerca elettrotecnica; chimica, sociologia, statistica e matematica pura.

Questo libro presenta ciò che dell'argomento è essenziale; esso è inteso principalmente a costituire un'utile integrazione dei testi correnti e un comodo manuale di riferimento per quanti lavorano nei diversi rami per i quali è necessaria una certa conoscenza della teoria delle matrici. Possiamo anzi dire che l'esposizione delle teorie e dei principi è abbastanza completa, perché il libro possa essere usato come testo a sé stante.

La materia è stata suddivisa in ventisei capitoli, dal momento che tale ripartizione non ne compromette la sistematicità e il logico sviluppo, mentre nel contempo accresce la praticità dell'opera come testo di consultazione. Si può inoltre così separare la trattazione delle matrici reali, che interessa la maggior parte dei lettori, da quella delle matrici con elementi complessi.

Ogni capitolo consta di una esposizione di definizioni pertinenti, principi e teoremi, esaurientemente illustrati con esempi, seguiti a loro volta da un accurato assortimento di esercizi risolti e da un buon numero di esercizi integrativi.

Chi comincia a studiare l'algebra delle matrici si accorge ben presto che le soluzioni degli esercizi numerici sono estremamente semplici. Le difficoltà insorgeranno probabilmente quando il lettore si troverà di fronte alla continua successione di definizioni, teoremi, dimostrazioni. Qui il guaio va individuato essenzialmente nella mancanza di maturità matematica. Di solito c'è da aspettarsela, perché la precedente esperienza dello studente non è andata quasi mai oltre la soluzione di problemi numerici, mentre una chiara esposizione di principi e la dimostrazione di teoremi vengono in gran parte rimandate a corsi più avanzati.

Scopo di questo libro è di rendere il lettore, se avrà la costanza di seguire attentamente i paragrafi introduttivi e gli esercizi risolti di ogni capitolo, capace di acquisire un grado ragionevole di sicurezza sull'argomento.

Gli esercizi già risolti, oltre a dare una maggiore varietà agli esempi di applicazione dei teoremi, contengono la maggior parte delle dimostrazioni di una certa lunghezza, nonché alcune altre più brevi ma significative.

Gli esercizi integrativi richiedono sia soluzioni di esercizi numerici che dimostrazioni. Di queste ultime, alcune esigono solo una modifica opportuna di dimostrazioni già date; più importanti sono comunque i numerosi teoremi, le cui dimostrazioni si possono sviluppare in poche righe. Alcuni sono del tipo che spesso vien definito impropriamente "ovvio", mentre altri richiederanno una notevole dose di ingegnosità.

Nessuno di essi, tuttavia, dovrà esser preso alla leggera; perché è proprio per l'abbondanza di simili teoremi che l'algebra elementare delle matrici diventa un "ovvio" corso introduttivo per chi vuol raggiungere un certo livello di maturità matematica. Il numero di questi problemi, notevole in ogni capitolo, renderà forse poco pratico risolverli tutti prima di passare ai successivi; occorrerà tuttavia dedicare speciale attenzione agli esercizi integrativi dei primi due capitoli. La padronanza di questi sarà molto utile per dare al lettore fiducia in se stesso nell'affrontare il seguito.

L'autore desidera cogliere l'opportunità di esprimere la propria gratitudine al gruppo di lavoro della Schaum Publishing Company, per la collaborazione.

FRANK AYRES, Jr.

CAPITOLO 1

Matrici

UN AGGREGATO RETTANGOLARE DI NUMERI racchiuso entro parentesi, ad esempio

$$(a)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix},$$

e soggetto a determinate regole di operazioni più innanzi indicate, è chiamato matrice. La (a) potrebbe essere considerata matrice coefficiente del sistema di equazioni lineari omogenee:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 7z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

oppure, matrice aumentata del sistema di equazioni lineari non omogenee:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Vedremo in seguito come calcolare le soluzioni di questi sistemi con l'uso delle matrici. La matrice (b) potrebbe avere uguale interpretazione; ma possiamo anche considerarne le righe come semplici coordinate dei punti (1, 3, 1), (2, 1, 4), (4, 7, 6) nello spazio ordinario. La matrice verrà poi utilizzata per discutere certi problemi, come,per esempio, se i tre punti giacciano o no sullo stesso piano o sulla stessa retta, passanti per l'origine degli assi.

Nella matrice

$$\textbf{(1.1)} \qquad \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3} \cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

i numeri o funzioni a_{ij} sono detti elementi. Nella notazione a due pedici, il primo indica la riga e il secondo la colonna in cui si trova l'elemento. Così, tutti gli elementi della seconda riga hanno 2 come primo pedice e tutti gli elementi della quinta colonna hanno 5 come secondo. Una matrice di m righe ed n colonne è detta matrice di ordine "m per n", o matrice $m \times n$.

(Per indicare una matrice sono talvolta usate due parentesi ( ), o due coppie di segmenti || ||. Noi useremo sempre le parentesi quadre.)

Talvolta la matrice (1.1) sarà chiamata "matrice $m \times n$" oppure "matrice $A = [a_{ij}]$". Una volta stabilito il principio, scriveremo semplicemente "matrice A".

MATRICI QUADRATE. Quando è $m = n$, la (1.1) è quadrata e viene detta matrice quadrata di ordine n, o matrice quadrata n.

In una matrice quadrata gli elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sono detti elementi diagonali.

La somma degli elementi diagonali di una matrice quadrata A è detta traccia (tr) di A.

MATRICI UGUALI. Due matrici $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ si dicono uguali $(A = B)$ solo ed esclusivamente se hanno lo stesso ordine, ed ogni elemento dell'una è uguale al corrispondente elemento dell'altra; cioè, unicamente nel seguente caso:

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

Così, due matrici sono uguali solo ed esclusivamente se l'una è un duplicato dell'altra.

MATRICE ZERO. La matrice della quale ogni elemento sia zero è detta matrice zero. Quando A è una matrice zero e non può verificarsi confusione sul suo ordine, scriveremo $A = 0$ invece del gruppo costituito da $m \times n$ elementi zero.

SOMMA DI MATRICI. Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ sono due matrici $m \times n$, si definisce loro somma (o differenza) $A \pm B$, la matrice $m \times n$ $C = [c_{ij}]$, ogni elemento della quale sia somma (o differenza) dei corrispondenti elementi di A e B. Allora: $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$.

Esempio 1. Se è $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

allora: $$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+0 \\ 0+(-1) & 1+2 & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

e: $$A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-0 \\ 0-(-1) & 1-2 & 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Due matrici dello stesso ordine si dicono conformabili per l'addizione o la sottrazione. Due matrici di ordini diversi non ammettono addizione o sottrazione. Per esempio, le due matrici (*a*) e (*b*) testé considerate sono non conformabili per addizione o sottrazione.

La somma di k matrici A è una matrice dello stesso ordine di A, ciascuno degli elementi della quale è k volte il corrispondente elemento di A. Possiamo dare una definizione: se k è uno scalare (e lo chiamiamo scalare per distinguerlo da $[k]$, che è una matrice 1 x 1), allora per $kA = Ak$ si intende la matrice ricavata da A moltiplicando ciascuno dei suoi elementi per k.

Esempio 2. Se è $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, allora

$$A + A + A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = 3A = A \cdot 3$$

e

$$-5A = \begin{bmatrix} -5(1) & -5(-2) \\ -5(2) & -5(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -10 & -15 \end{bmatrix}$$

In particolare $-A$, detto il negativo di A, indica la matrice ottenuta moltiplicando ogni elemento di A per -1, o semplicemente cambiando il segno di tutti i suoi elementi. Per qualsiasi A, sussiste la $A + (-A) = 0$, in cui 0 indica la matrice zero dello stesso ordine di A.

Nell'ipotesi che le matrici A, B, C siano conformabili per addizione, stabiliamo le proprietà:

(*a*) $A + B = B + A$ (commutativa)

(*b*) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativa)

(*c*) $k(A + B) = kA + kB = (A + B)k$, essendo k uno scalare

(*d*) Esiste una matrice D tale che $A + D = B$.

Queste proprietà scaturiscono dalle proprietà dell'algebra elementare, che regolano l'addizione di numeri e polinomi. Se ne ricava inoltre:

1. Le matrici conformabili obbediscono alle stesse proprietà di addizione dei loro elementi.

MOLTIPLICAZIONE. Per prodotto AB della matrice $A = [a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1m}]$ di ordine $1 \times m$ e della matrice $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$ di ordine $m \times 1$, nell'ordine, si intende la matrice 1×1, $C = [a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \cdots + a_{1m} b_{m1}]$.

Ovvero: $$[a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1m}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \cdots + a_{1m} b_{m1}] = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{1k} b_{k1}\right].$$

Si noti che l'operazione procede righe per colonne: ogni elemento della riga viene moltiplicato per il corrispondente elemento della colonna, sommando poi i prodotti.

Esempio 3. (*a*) $$[2\ 3\ 4] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [2(1) + 3(-1) + 4(2)] = [7]$$

(*b*) $$[3\ -1\ 4] \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = [-6 - 6 + 12] = 0$$

Per prodotto AB (in questo ordine) della matrice $m \times p$ $A = [a_{ij}]$ e della matrice $p \times n$ $B = [b_{ij}]$ si intende la matrice $m \times n$ $C = [c_{ij}]$ in cui

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Si concepisca A costituita da m righe, e B da n colonne. Costruendo $C = AB$, ogni riga di A viene moltiplicata una volta – e solo una volta – per ogni colonna di B. L'elemento c_{ij} di C è quindi il prodotto della i-ma riga di A e della j-ma colonna di B.

Esempio 4.

$$A\ B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \\ a_{31} b_{11} + a_{32} b_{21} & a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22} \end{bmatrix}$$

Il prodotto AB è definito, ovvero A è conformabile a B per la moltiplicazione, solo quando il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B. Ma anche se A è conformabile a B per la moltiplicazione (il prodotto AB è definibile), non ne consegue necessariamente che B sia sempre conformabile ad A per la moltiplicazione (il prodotto BA può essere definibile o no).

Si vedano i Problemi 3-4.

Nell'ipotesi che A, B, C siano conformabili per le somme e i prodotti accennati, avremo:

(*e*) $A(B + C) = AB + AC$ (prima proprietà distributiva)

(*f*) $(A + B)C = AC + BC$ (seconda proprietà distributiva)

(*g*) $A(BC) = (AB)C$ (proprietà associativa)

Comunque valgono le:

(*h*) $AB \neq BA$, in genere

(*i*) $AB = 0$ non implica necessariamente $A = 0$ o $B = 0$

(*j*) $AB = AC$ non implica necessariamente $B = C$.

Si vedano i Problemi da 3 a 8

PRODOTTI PER PARTIZIONE. Sia la $A = [a_{ij}]$ di ordine $m \times p$ e $B = [b_{ij}]$ di ordine $p \times n$. Impostando il prodotto AB, la matrice A viene in effetti ripartita in m matrici di ordine $1 \times p$ e B in n matrici di ordine $p \times 1$. Si possono anche usare partizioni differenti. Per esempio, A e B siano ripartite in matrici di dato ordine tracciando opportunamente delle linee punteggiate:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} (m_1 \times p_1) & (m_1 \times p_2) & (m_1 \times p_3) \\ \hline (m_2 \times p_1) & (m_2 \times p_2) & (m_2 \times p_3) \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} (p_1 \times n_1) & (p_1 \times n_2) \\ \hline (p_2 \times n_1) & (p_2 \times n_2) \\ \hline (p_3 \times n_1) & (p_3 \times n_2) \end{array}\right]$$

ovvero

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ \hline B_{31} & B_{32} \end{array}\right]$$

In tale partizione è necessario che le colonne di A e le righe di B siano suddivise esattamente allo stesso modo; comunque m_1, m_2, n_1, n_2 possono essere un qualsiasi numero intero non negativo (compreso lo 0) tale che $m_1 + m_2 = m$ e $n_1 + n_2 = n$. Allora:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = C$$

Esempio 5. Calcolare il prodotto AB, dati $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Suddividendo in modo che sia:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

avremo:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}[2 \ 3 \ 1] & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}[2] \\ [1 \ 0]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + [1][2 \ 3 \ 1] & [1 \ 0]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [1][2] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [1 \ 1 \ 1] + [2 \ 3 \ 1] & [0] + [2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [3 \ 4 \ 2] & [2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Si veda anche il Problema 9.

Siano ora $A, B, C, \ldots$ delle matrici quadrate di ordine n; la matrice A venga suddivisa in sottomatrici dell'ordine indicato in figura:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} (p_1 \times p_1) & (p_1 \times p_2) & \ldots & (p_1 \times p_s) \\ \hline (p_2 \times p_1) & (p_2 \times p_2) & \ldots & (p_2 \times p_s) \\ \hline \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \hline (p_s \times p_1) & (p_s \times p_2) & \ldots & (p_s \times p_s) \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{s1} & A_{s2} & \ldots & A_{ss} \end{bmatrix}$$

e le $B, C, \ldots$ siano suddivise nello stesso modo. Allora si potranno effettuare somme, differenze, prodotti usando le matrici $A_{11}, A_{12}, \ldots; B_{11}, B_{12}, \ldots; C_{11}, C_{12}, \ldots$.

PROBLEMI RISOLTI

1. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+(-4) & -1+1 & 0+2 \\ 4+1 & 0+5 & 2+0 & 1+3 \\ 2+2 & -5+(-2) & 1+3 & 2+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & 2+4 & -1-1 & 0-2 \\ 4-1 & 0-5 & 2-0 & 1-3 \\ 2-2 & -5+2 & 1-3 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 & -2 \\ 3 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $3\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 0 \\ 12 & 0 & 6 & 3 \\ 6 & -15 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

(d) $-\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

2. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, trovare una matrice $D = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ tale che $A + B - D = 0$.

Se $A + B - D = \begin{bmatrix} 1-3-p & 2-2-q \\ 3+1-r & 4-5-s \\ 5+4-t & 6+3-u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-p & -q \\ 4-r & -1-s \\ 9-t & 9-u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $-2-p = 0$ e $p = -2$, $4-r = 0$ e $r = 4$, ... Allora è $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} = A + B$.

3. (a) $[4 \ 5 \ 6]\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = [4(2) + 5(3) + 6(-1)] = [17]$

(b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}[4 \ 5 \ 6] = \begin{bmatrix} 2(4) & 2(5) & 2(6) \\ 3(4) & 3(5) & 3(6) \\ -1(4) & -1(5) & -1(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

(c) $[1 \ 2 \ 3]\begin{bmatrix} 4 & -6 & 9 & 6 \\ 0 & -7 & 10 & 7 \\ 5 & 8 & -11 & -8 \end{bmatrix}$
$= [1(4) + 2(0) + 3(5) \quad 1(-6) + 2(-7) + 3(8) \quad 1(9) + 2(10) + 3(-11) \quad 1(6) + 2(7) + 3(-8)]$
$= [19 \ 4 \ -4 \ -4]$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1) + 3(2) + 4(3) \\ 1(1) + 5(2) + 6(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 29 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(3) + 2(1) + 1(-2) & 1(-4) + 2(5) + 1(2) \\ 4(3) + 0(1) + 2(-2) & 4(-4) + 0(5) + 2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$

4. Sia $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Allora:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Il lettore dimostri che $A^3 = A \cdot A^2$ e $A^2 \cdot A^3 = A^3 \cdot A^2$.

5. Dimostrare che:

$(a)\ \sum_{k=1}^{2} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{2} a_{ik}c_{kj}$,

$(b)\ \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} a_{ij}$,

$(c)\ \sum_{k=1}^{2} a_{ik}(\sum_{h=1}^{3} b_{kh}c_{hj}) = \sum_{h=1}^{3}(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kh})c_{hj}$.

$$(a)\ \sum_{k=1}^{2} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = a_{i1}(b_{1j}+c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j}+c_{2j}) = (a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}) + (a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j})$$
$$= \sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{2} a_{ik}c_{kj}.$$

$$(b)\ \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{i=1}^{2}(a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}) = (a_{11}+a_{12}+a_{13}) + (a_{21}+a_{22}+a_{23})$$
$$= (a_{11}+a_{21}) + (a_{12}+a_{22}) + (a_{13}+a_{23})$$
$$= \sum_{i=1}^{2} a_{i1} + \sum_{i=1}^{2} a_{i2} + \sum_{i=1}^{2} a_{i3} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} a_{ij}.$$

E' la semplice affermazione che per sommare tutti gli elementi di una matrice si possono sommare per primi gli elementi di ogni riga o gli elementi di ogni colonna.

$$(c)\ \sum_{k=1}^{2} a_{ik}(\sum_{h=1}^{3} b_{kh}c_{hj}) = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}(b_{k1}c_{1j} + b_{k2}c_{2j} + b_{k3}c_{3j})$$
$$= a_{i1}(b_{11}c_{1j} + b_{12}c_{2j} + b_{13}c_{3j}) + a_{i2}(b_{21}c_{1j} + b_{22}c_{2j} + b_{23}c_{3j})$$
$$= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21})c_{1j} + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22})c_{2j} + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23})c_{3j}$$
$$= (\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{k1})c_{1j} + (\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{k2})c_{2j} + (\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{k3})c_{3j}$$
$$= \sum_{h=1}^{3}(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kh})c_{hj}.$$

6. Dimostrare che: se $A = [a_{ij}]$ è di ordine $m\times n$ e la $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$ sono di ordine $n\times p$, allora $A(B+C) = AB + AC$.

Gli elementi della *i*-ma riga di *A* sono $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ e quelli della *j*-ma colonna di $B+C$ sono $b_{1j}+c_{1j},\ b_{2j}+c_{2j},\ \ldots,\ b_{nj}+c_{nj}$. Allora l'elemento che si trova nella *i*-ma riga e nella *j*-ma colonna di

$a_{i1}(b_{1j}+c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j}+c_{2j}) + \ldots + a_{in}(b_{nj}+c_{nj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}$,

$A(B+C)$ è:

collocandosi la somma degli elementi nella *i*-ma riga e *j*-ma colonna di *AB* e *AC*.

7. Dimostrare che: se $A = [a_{ij}]$ è di ordine $m\times n$, $B = [b_{ij}]$ di ordine $n\times p$, e se $C = [c_{ij}]$ è di ordine $p\times q$, allora $A(BC) = (AB)C$.

Gli elementi della *i*-ma riga di *A* sono $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ e gli elementi della *j*-ma colonna di *BC* sono

$\sum_{h=1}^{p} b_{1h}c_{hj},\ \sum_{h=1}^{p} b_{2h}c_{hj},\ \ldots,\ \sum_{h=1}^{p} b_{nh}c_{hj}$; quindi l'elemento che si trova nella *i*-ma riga e *j*-ma colonna di $A(BC)$ sarà:

$$a_{i1}\sum_{h=1}^{p} b_{1h}c_{hj} + a_{i2}\sum_{h=1}^{p} b_{2h}c_{hj} + \ldots + a_{in}\sum_{h=1}^{p} b_{nh}c_{hj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\sum_{h=1}^{p} b_{kh}c_{hj})$$
$$= \sum_{h=1}^{p}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kh})c_{hj} = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1})c_{1j} + (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2})c_{2j} + \ldots + (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kp})c_{pj}$$

E questo è anche l'elemento collocato nella *i*-ma riga e *j*-ma colonna di $(AB)C$; quindi, $A(BC) = (AB)C$.

8. Nell'ipotesi che A, B, C, D siano conformabili, dimostrare in due modi che
$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD.$$

Serviamoci della proprietà (*e*) e poi della (*f*): $(A+B)(C+D) = (A+B)C + (A+B)D = AC + BC + AD + BD$.

Serviamoci poi della (*f*) e quindi della (*e*): $(A+B)(C+D) = A(C+D) + B(C+D) = AC + AD + BC + BD$
$= AC + BC + AD + BD$.

9. (*a*)
$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 3&1&2\end{array}\right] = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[3\ 1\ 2] = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3&1&2\\6&2&4\\9&3&6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4&1&2\\6&3&4\\9&3&7\end{bmatrix}$$

(*b*)
$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc}1&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\\hline 0&0&3&0&0&0\\0&0&0&4&0&0\\\hline 0&0&0&0&5&0\\0&0&0&0&0&6\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc|cc}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\\\hline 0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&3\end{array}\right] = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} & [0] & [0]\\ [0] & \begin{bmatrix}3&0\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix} & [0]\\ [0] & [0] & \begin{bmatrix}5&0\\0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&3&0&0&0\\0&0&0&12&0&0\\0&0&0&0&10&0\\0&0&0&0&0&18\end{bmatrix}$$

(*c*)
$$\left[\begin{array}{cc|ccc|c}1&1&0&0&0&0\\2&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&3&1&2&0\\0&0&1&2&1&0\\0&0&0&1&1&0\\\hline 0&0&0&0&0&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|ccc|c}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&7\\\hline 3&4&5&6&7&8\\4&5&6&7&8&9\\9&8&7&6&5&4\\\hline 8&7&6&5&4&1\end{array}\right] = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4&5\\4&5&6\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}3&1&2\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\4&5\\9&8\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3&1&2\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6&7\\6&7&8\\7&6&5\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3&1&2\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}8\\9\\4\end{bmatrix}\\ [1]\cdot[8\ 7] & [1]\cdot[6\ 5\ 4] & [1]\cdot[1]\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}3&5\\4&7\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}7&9&11\\10&13&16\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}13\\19\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}31&33\\20&22\\13&13\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}35&37&39\\24&26&28\\13&13&13\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}41\\30\\13\end{bmatrix}\\ [8\ \ 7] & [6\ \ 5\ \ 4] & [1]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&5&7&9&11&13\\4&7&10&13&16&19\\31&33&35&37&39&41\\20&22&24&26&28&30\\13&13&13&13&13&13\\8&7&6&5&4&1\end{bmatrix}$$

10. Siano $\begin{cases}x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2\\x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2\\x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2\end{cases}$ tre forme lineari in y_1 e y_2, e sia la $\begin{cases}y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2\\y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2\end{cases}$ una trasformazione lineare delle coordinate (y_1, y_2) in nuove coordinate (z_1, z_2). Risulterà, applicando detta trasformazione alle forme lineari precedenti, il gruppo:

$$\begin{cases}x_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})z_2\\x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})z_2\\x_3 = (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21})z_1 + (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22})z_2\end{cases}$$

Usando la notazione matriciale avremo le tre forme lineari $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ e la trasformazione $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$. Risulta dall'applicazione di detta trasformazione il gruppo di tre forme

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$$

In tal modo, quando un gruppo di *m* forme lineari in *n* variabili (matrice *A*) è oggetto di una trasformazione lineare delle variabili stesse (matrice *B*), ne risulta un gruppo di *m* forme lineari (matrice $C = AB$).

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

11. Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, e $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$,

(*a*) Calcolare $A+B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $A-C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(*b*) Calcolare $-2A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -10 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $0 \cdot B = 0 \cdot$

(*c*) Verificare $A + (B - C) = (A+B) - C$.

(*d*) Trovare una matrice D tale che $A+D = B$. Verificare che: $D = B - A = -(A - B)$.

12. Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, calcolare $AB = 0$ e $BA = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$. Si può constatare che è generalmente: $AB \neq BA$.

13. Date le $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, e $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, dimostrare che $AB = AC$. Risulta evidente che, se $AB = AC$, questo non implica necessariamente che sia $B = C$.

14. Date le $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, e $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, dimostrare che $(AB)C = A(BC)$.

15. Usando le matrici del Problema 11, dimostrare che $A(B+C) = AB + AC$ e $(A+B)C = AC + BC$.

16. Spiegare perché, in generale, è: $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$ e $A^2 - B^2 \neq (A - B)(A+B)$.

17. Date le $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, e $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$,

(*a*) dimostrare che: $AB = BA = 0$, $AC = A$, $CA = C$;

(*b*) usare il risultato precedente per dimostrare che

$$ACB = CBA, \quad A^2 - B^2 = (A - B)(A + B), \quad (A \pm B)^2 = A^2 + B^2.$$

18. Data la $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, in cui $i^2 = -1$, ricavare una formula per le potenze intere positive di A.

Risp. $A^n = I, A, -I, -A$ secondo che $n = 4p, 4p+1, 4p+2, 4p+3$, in cui $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

19. Dimostrare che il prodotto di ogni due o più matrici del gruppo $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ è ancora una matrice dello stesso gruppo.

20. Date le matrici: A di ordine $m \times n$, B di ordine $n \times p$, C di ordine $r \times q$, trovare sotto quali condizioni per p, q, r esse sono conformabili per i prodotti che seguono; trovare altresì l'ordine di ciascuna matrice prodotto: (*a*) ABC, (*b*) ACB, (*c*) $A(B+C)$

Risp. (*a*) $p = r$; $m \times q$ (*b*) $r = n = q$; $m \times p$ (*c*) $r = n$, $p = q$; $m \times q$

21. Calcolare il prodotto AB, date:

(*a*) $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ e $B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ *Risp.*: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(*b*) $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ e $B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 \end{array}\right]$ *Risp.*: $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

(*c*) $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$ e $B = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$ *Risp.*: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

22. Dimostrare: (*a*) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$; (*b*) $\operatorname{tr}(kA) = k \operatorname{tr}(A)$.

23. Se $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 - 3y_3 \end{cases}$ e $\begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 \\ y_2 = 2z_1 - z_2 \\ y_3 = 2z_1 + 3z_2 \end{cases}$, verificare che $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_1 + 7z_2 \\ -2z_1 - 6z_2 \end{bmatrix}.$$

24. Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ sono di ordine $m \times n$, e se $C = [c_{ij}]$ è di ordine $n \times p$, dimostrare che è $(A+B)C = AC + BC$.

25. Siano $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{jk}]$, in cui $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, n)$. Indicare con β_j la somma degli elementi della j-ma riga di B, ovvero: $\beta_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}$. Dimostrare che l'elemento nella i-ma riga di $A \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_p \end{bmatrix}$ è la somma degli elementi che si trovano nella i-ma riga di AB. Con analogo metodo controllare i prodotti eseguiti nei Problemi 12 e 13.

26. Si definisce relazione di equivalenza una relazione (tipo parallelismo o congruenza) tra entità matematiche che possiedano le seguenti proprietà:

(i) Determinativa: a, o è in relazione con b, o non lo è;

(ii) Riflessiva: a è in relazione con a, e questo vale per ogni a;

(iii) Simmetrica: se a è in relazione con b, b è in relazione con a;

(iv) Transitiva: se a è in relazione con b e b è in relazione con c, a è in relazione con c.

Dimostrare che il parallelismo fra rette, la similitudine di triangoli e l'uguaglianza di matrici sono relazioni di equivalenza. Dimostrare che peraltro la perpendicolarità fra rette non è una relazione di equivalenza.

27. Dimostrare che la conformabilità per l'addizione delle matrici è una relazione di equivalenza, mentre la conformabilità per la moltiplicazione non lo è.

28. Dimostrare: se A, B, C sono delle matrici tali che $AC = CA$ e $BC = CB$, allora $(AB \pm BA)C = C(AB \pm BA)$.

CAPITOLO 2

Tipi di matrici

MATRICE IDENTICA. Una matrice quadrata A i cui elementi a_{ij} sono zero per $i>j$ è detta *triangolare alta*; una matrice quadrata A i cui elementi a_{ij} sono zero per $i<j$ è detta triangolare bassa. Cioè:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{è triangolare alta;}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{è triangolare bassa.}$$

La matrice $D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, che è contemporaneamente triangolare alta e triangolare bassa, si dice matrice diagonale. Essa verrà spesso indicata così:

$$D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn})$$

Vedere il Problema 1.

Se nella matrice D su indicata è $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = k$, la D si chiama matrice *scalare*; se è inoltre $k=1$, essa è una matrice *identica* e si indica con I_n. Per esempio:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quando l'ordine ne è evidente o senza importanza, la matrice identica si indica con la semplice I. E' evidente che $I_n + I_n + \ldots$ fino a p termini $= p \cdot I_n = \text{diag}(p, p, p, \ldots, p)$ e $I^p = I \cdot I \ldots$ fino a p fattori $= I$. Le matrici identiche hanno alcune proprietà del numero intero 1. Per esempio se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, allora $I_2 \cdot A = A \cdot I_3 = I_2 A I_3 = A$, come il lettore può dimostrare subito.

MATRICI QUADRATE PARTICOLARI. Se A e B sono matrici quadrate tali che $AB = BA$, si dice che A e B sono *commutabili*, ovvero che *commutano*. E' semplice dimostrare che se A è una qualsiasi matrice quadrata di ordine n, essa commuta con se stessa e con la I_n.

Vedere il Problema 2.

Se A e B sono tali che $AB = -BA$, si dice che *anti-commutano*.

Una matrice A per cui $A^{k+1} = A$, essendo k un intero positivo, si dice *periodica*. Se k è il minimo intero positivo per cui è $A^{k+1} = A$, allora A è di *periodo k*.

Se è $k=1$, in modo che $A^2 = A$, A si dice *idempotente*.

Vedere i Problemi 3-4.

Una matrice A che dia $A^p = 0$, in cui p è un intero positivo, si dice *nilpotente*. Se p è il minimo intero positivo per cui $A^p = 0$, A viene definita nilpotente di *indice p*.

Vedere i Problemi 5-6.

INVERSA DI UNA MATRICE. Se A e B sono matrici quadrate tali che $AB = BA = I$, B viene detta inversa di A, e scriveremo $B = A^{-1}$ (B uguale inversa di A). Anche la matrice B ha A come propria inversa, e possiamo scrivere $A = B^{-1}$.

Esempio 1. Poiché $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, ogni matrice del prodotto è inversa dell'altra.

Vedremo in seguito (cap. 7) che non tutte le matrici quadrate hanno una inversa. Qui possiamo comunque dimostrare che, se A ha un'inversa, quell'inversa è unica.

Vedere il Problema 7.

Se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine con inverse rispettivamente A^{-1} e B^{-1}, allora $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, ovvero:

I. L'inversa del prodotto di due matrici che ammettano inverse è il prodotto, nel *senso contrario*, delle inverse stesse.

Vedere il Problema 8.

Una matrice A tale che $A^2 = I$ si dice *involutoria*. Una matrice identica, per esempio, è involutoria. Una matrice involutoria coincide con la propria inversa.

Vedere il Problema 9.

TRASPOSTA DI UNA MATRICE. La matrice di ordine $n \times m$ che si ottiene scambiando righe e colonne di una matrice A di ordine $m \times n$ si dice trasposta di A e si indica con A' (trasposta di A). Per esempio, la trasposta di $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ è $A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Si noti che l'elemento a_{ij} della i-ma riga, j-ma colonna di A si trova nella j-ma riga, i-ma colonna di A'.

Se A' e B' sono trasposte rispettivamente di A e B, e se k è uno scalare, abbiamo subito:

$$(a) \quad (A')' = A \quad \text{e} \quad (b) \quad (kA)' = kA'$$

Nei Problemi 10 e 11 dimostriamo:

II. La trasposta della somma di due matrici è la somma delle loro trasposte. Cioè:

$$(A+B)' = A' + B'$$

e che

III. La trasposta del prodotto di due matrici è il prodotto — in ordine inverso — delle loro trasposte, cioè:

$$(AB)' = B' \cdot A'$$

Vedere i Problemi 10-12.

MATRICI SIMMETRICHE. Una matrice quadrata A tale che $A' = A$ si dice *simmetrica*. In tal modo una matrice quadrata $A = [a_{ij}]$ è *simmetrica* con la condizione necessaria e sufficiente che $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni valore di i e j. Per esempio, la $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ è *simmetrica*, e ugualmente lo è kA, per qualsiasi scalare k.

Nel Problema 13 dimostriamo che:

IV. Se A è una matrice quadrata di ordine n, allora la $A + A'$ è simmetrica.

Una matrice quadrata A tale che $A' = -A$ si dice emisimmetrica. Essa è emisimmetrica con la condizione necessaria e sufficiente che $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni valore di i e j. Gli elementi situati sulla diagonale principale saranno chiaramente tutti zeri. Per esempio, la

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$ è emisimmetrica, e tale è kA per qualsiasi scalare k.

Con lievi variazioni, nel Problema 13 si può anche dimostrare che:

V. Se A è una qualsiasi matrice quadrata di ordine n, la $A - A'$ è emisimmetrica.

Dai teoremi IV e V si deduce che:

VI. Ogni matrice quadrata A può essere scritta come somma di una matrice simmetrica $B = \frac{1}{2}(A+A')$ e di una matrice emisimmetrica $C = \frac{1}{2}(A-A')$.

Vedere i Problemi 14-15.

MATRICE CONIUGATA. Se a e b sono due numeri reali, e definiamo $i = \sqrt{-1}$, l'espressione $z = a + bi$ è detta numero complesso. I numeri complessi $a + bi$ e $a - bi$ sono detti coniugati, e ognuno è coniugato dell'altro. Se è $z = a + bi$, il suo coniugato si indica con $\bar{z} = \overline{a+bi}$.

Sia $z_1 = a + bi$ e $z_2 = \bar{z}_1 = a - bi$; è allora $\bar{z}_2 = \bar{\bar{z}}_1 = \overline{a - bi} = a + bi$, ovvero: il coniugato del coniugato di un numero complesso z è lo stesso z.

Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, possiamo dire:

(i) $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$ e $\overline{z_1 + z_2} = (a+c) - (b+d)i = (a-bi) + (c-di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,
cioè: il coniugato della somma di due numeri complessi è la somma dei loro coniugati.

(ii) $z_1 \cdot z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$ e $\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac-bd) - (ad+bc)i = (a-bi)(c-di) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,
ovvero: il coniugato del prodotto di due numeri complessi è il prodotto dei loro coniugati.

Quando sia A una matrice avente numeri complessi per elementi, la matrice che si ottiene sostituendo ogni elemento di A con il suo coniugato, si dice matrice coniugata di A, e si indica con $\bar{A}$.

Esempio 2. Se è $A = \begin{bmatrix} 1+2i & i \\ 3 & 2-3i \end{bmatrix}$, allora $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & -i \\ 3 & 2+3i \end{bmatrix}$.

Se $\bar{A}$ e $\bar{B}$ sono le matrici coniugate di A e B, e k è uno scalare qualsiasi, abbiamo subito:

$$(c)\ \ (\bar{\bar{A}}) = A \qquad \text{e} \qquad (d)\ \ (\overline{kA}) = \bar{k} \cdot \bar{A}$$

Mediante le già considerate proprietà (i) e (ii), si può dimostrare che:

VII. La coniugata della somma di due matrici è la somma delle loro coniugate: $\overline{(A+B)} = \bar{A} + \bar{B}$.

VIII. La coniugata del prodotto di due matrici è il prodotto — nel medesimo ordine — delle loro coniugate: $\overline{(AB)} = \bar{A} \cdot \bar{B}$.

La trasposta di $\bar{A}$ si indica con $\bar{A}'$ (coniugata trasposta di A). Essa si scrive talvolta come A^*. Abbiamo che:

IX. La trasposta della coniugata di A è uguale alla coniugata della sua trasposta: $(\bar{A})' = (\overline{A'})$.

Esempio 3. Dall'Esempio 2:

$$(\bar{A})' = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ -i & 2+3i \end{bmatrix} \quad \text{mentre } A' = \begin{bmatrix} 1+2i & 3 \\ i & 2-3i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (\overline{A'}) = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ -i & 2+3i \end{bmatrix} = (\bar{A})'$$

MATRICI HERMITIANE. Una matrice quadrata $A = [a_{ij}]$ tale che $\bar{A}' = A$ si dice *Hermitiana*. A sarà dunque *Hermitiana* solo ed esclusivamente nel caso in cui $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ per tutti i valori di i e j. E' evidente che gli elementi diagonali di una matrice *Hermitiana* sono numeri reali.

Esempio 4. La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$ è *Hermitiana*.

Se k è un numero reale qualsiasi, la kA può dirsi *Hermitiana*? E se k è un numero complesso?

Una matrice quadrata $A = [a_{ij}]$ tale che $\bar{A}' = -A$ si dice *anti-Hermitiana*. Quindi, A è *anti-Hermitiana* purché sussista la condizione che sia $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$ per tutti i valori di i e j. Evidentemente, gli elementi diagonali di una matrice *anti-Hermitiana* sono zeri, o numeri immaginari puri.

Esempio 5. La matrice $A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$ è *anti-Hermitiana*. Sarà *anti-Hermitiana* la kA per k numero reale o complesso o immaginario puro?

Con piccole variazioni nel Problema 13, si può dimostrare:

X. Se A è una matrice quadrata di ordine n, la $A + \bar{A}'$ è *Hermitiana*, la $A - \bar{A}'$ è *anti-Hermitiana*.

Dal Teorema X segue:

XI. Qualsiasi matrice quadrata A ad elementi complessi può essere scritta come somma di una matrice *Hermitiana* $B = \frac{1}{2}(A + \bar{A}')$ e di una *anti-Hermitiana* $C = \frac{1}{2}(A - \bar{A}')$.

SOMMA DIRETTA. Siano $A_1, A_2, \ldots, A_s$ delle matrici quadrate di ordine rispettivo $m_1, m_2, \ldots, m_s$. La forma generale:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A_s \end{bmatrix} = \text{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)$$

della matrice diagonale si chiama somma diretta delle A_i.

Esempio 6. Siano $A_1 = [2]$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, e $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

La somma diretta di A_1, A_2, A_3 è: $\text{diag}(A_1, A_2, A_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Il Problema 9(b) del cap. 1 illustra il teorema

XII. Se $A = \text{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)$ e $B = \text{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_s)$, in cui A_i e B_i sono dello stesso ordine per $(i = 1, 2, \ldots, s)$, allora $AB = \text{diag}(A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_sB_s)$.

PROBLEMI RISOLTI

1. Poiché $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \ldots & a_{11}b_{1n} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & \ldots & a_{22}b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mm}b_{m1} & a_{mm}b_{m2} & \ldots & a_{mm}b_{mn} \end{bmatrix}$, il prodotto AB di una matrice diagonale quadrata di ordine m, $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm})$ e di una qualsiasi matrice B di ordine $m \times n$, si ottiene moltiplicando la prima riga di B per a_{11}, la seconda per a_{22}, e così via.

2. Si dimostri che le matrici $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ commutano per qualsiasi valore di a, b, c, d.

   Questo segue subito da: $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$.

3. Dimostrare che la $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ è idempotente.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$$

4. Si renda evidente che se $AB = A$ e $BA = B$, allora A e B sono idempotenti.

   $ABA = (AB)A = A \cdot A = A^2$ e $ABA = A(BA) = AB = A$; è quindi $A^2 = A$, e A è idempotente. Si usi il prodotto BAB per dimostrare che è pure idempotente B.

5. Dimostrare che $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ è nilpotente di ordine 3.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 0$$

6. Se A è nilpotente di ordine 2, dimostrare che vale la $A(I \pm A)^n = A$ per n intero positivo qualsiasi.

   Poiché $A^2 = 0$, $A^3 = A^4 = \ldots = A^n = 0$. Quindi $A(I \pm A)^n = A(I \pm nA) = A \pm nA^2 = A$.

7. Siano tre matrici quadrate A, B, C tali che $AB = I$ e $CA = I$. Allora è $(CA)B = C(AB)$, e quindi $B = C$. Dunque, $B = C = A^{-1}$ è l'unica matrice inversa di A. (E cosa diciamo per la B^{-1} ?)

8. Dimostrare: $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

   Per definizione, $(AB)^{-1}(AB) = (AB)(AB)^{-1} = I$. Ora, è:

$$(B^{-1} \cdot A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1} \cdot A)B = B^{-1} \cdot I \cdot B = B^{-1} \cdot B = I$$

   e

$$AB(B^{-1} \cdot A^{-1}) = A(B \cdot B^{-1})A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

   Come visto nel Problema 7, $(AB)^{-1}$ è unica; quindi, $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

9. Dimostrare che una matrice A è involutoria solo ed esclusivamente se $(I - A)(I + A) = 0$.

   Poniamo $(I-A)(I+A) = I - A^2 = 0$; allora $A^2 = I$, ed A è involutoria.

   Ipotizziamo invece che A sia involutoria; allora sarà $A^2 = I$, e $(I-A)(I+A) = I - A^2 = I - I = 0$.

10. Dimostrare che $(A + B)' = A' + B'$.

    Siano $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$. Dobbiamo solo controllare che gli elementi della i-ma riga e j-ma colonna di A', B' e $(A+B)'$ siano rispettivamente a_{ji}, b_{ji} e $a_{ji} + b_{ji}$.

11. Si dimostri che $(AB)' = B'A'$.

    Sia la $A = [a_{ij}]$ di ordine $m \times n$, la $B = [b_{ij}]$ di ordine $n \times p$; quindi la $C = AB = [c_{ij}]$ è di ordine $m \times p$. L'elemento che si trova nella i-ma riga e j-ma colonna di AB è $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$, ed è anche l'elemento compreso nella j-ma riga, i-ma colonna di $(AB)'$.

    Gli elementi della j-ma riga di B' sono $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}$, quelli della i-ma colonna di A' sono $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$. Allora l'elemento della j-ma riga, i-ma colonna di $B'A'$ sarà:

$$\sum_{k=1}^{n} b_{kj} \cdot a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = c_{ij}$$

    E quindi: $(AB)' = B'A'$.

12. Dimostrare che è: $(ABC)' = C'B'A'$.

    Scriviamo $ABC = (AB)C$. Allora, per il Problema 11, $(ABC)' = \{(AB)C\}' = C'(AB)' = C'B'A'$.

13. Si dimostri che se la $A = [a_{ij}]$ è quadrata di ordine n, la $B = [b_{ij}] = A + A'$ è simmetrica.

Prima dimostrazione.

L'elemento della i-ma riga, j-ma colonna di A è a_{ij}; il corrispondente elemento di A' è a_{ji}; quindi $b_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$. L'elemento poi della j-ma riga, i-ma colonna di A è a_{ji}, mentre il corrispondente elemento di A' è a_{ij}; quindi $b_{ji} = a_{ji} + a_{ij}$. Allora è $b_{ij} = b_{ji}$ e la B è simmetrica.

Seconda dimostrazione.

Dal Problema 10, $(A+A')' = A' + (A')' = A' + A = A + A'$ e $(A+A')$ è simmetrica.

14. Dimostrare che se A e B sono matrici simmetriche quadrate, di ordine n, la AB è simmetrica solo ed unicamente nel caso in cui A e B permutino.

Poniamo che A e B permutino: allora $AB = BA$. Quindi $(AB)' = B'A' = BA = AB$, e la AB è simmetrica.

Poniamo invece che AB sia simmetrica; sarà $(AB)' = AB$. Ora $(AB)' = B'A' = BA$; ne consegue $AB = BA$, cioè le matrici A e B permutano.

15. Dimostriamo che se la matrice quadrata A di ordine m è simmetrica (o emisimmetrica) e se la P è di ordine $m \times n$, la $B = P'AP$ è simmetrica (o emisimmetrica).

Se A è simmetrica, per il Problema 12 è $B' = (P'AP)' = P'A'(P')' = P'A'P = P'AP$, e B risulta simmetrica.

Se A è emisimmetrica, allora $B' = (P'AP)' = -P'AP$, e B risulta emisimmetrica.

16. Si dimostri, che se A e B sono matrici quadrate di ordine n, allora A e B permutano solo ed unicamente nel caso in cui $A - kI$ e $B - kI$ permutano, per k scalare qualsiasi.

Poniamo che A e B permutino; allora $AB = BA$, e

$$\begin{aligned}(A-kI)(B-kI) &= AB - k(A+B) + k^2I \\ &= BA - k(A+B) + k^2I = (B-kI)(A-kI)\end{aligned}$$

Così, $A - kI$ e $B - kI$ permutano.

Poniamo ora che $A - kI$ e $B - kI$ permutino; allora avremo:

$$\begin{aligned}(A-kI)(B-kI) &= AB - k(A+B) + k^2I \\ &= BA - k(A+B) + k^2I = (B-kI)(A-kI)\end{aligned}$$

quindi $AB = BA$: A e B permutano.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

17. Dimostrare che il prodotto di due matrici triangolari alte (o basse) è una matrice triangolare alta (o bassa).

18. Si ricavi una regola per calcolare il prodotto BA fra una matrice B di ordine $m \times n$ e $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.
Traccia: vedere il Problema 1.

19. Dimostrare che la matrice scalare con elemento diagonale k si può scrivere come kI, e che è $kA = kIA = \text{diag}(k, k, \ldots, k)\,A$, in cui l'ordine della I è proprio l'ordine di A secondo le righe.

20. Se A è quadrata di ordine n dimostrare che $A^p \cdot A^q = A^q \cdot A^p$, in cui p e q sono interi positivi.

21. (*a*) Dimostrare che $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ sono idempotenti.

(*b*) Con le stesse A e B dimostrare che il reciproco del Problema 4 non sussiste.

22. Se A è idempotente, dimostrare che $B = I - A$ è idempotente, e che $AB = BA = 0$.

23. (*a*) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, dimostrare che $A^2 - 4A - 5I = 0$.

(*b*) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, dimostrare che $A^3 - 2A^2 - 9A = 0$, mentre $A^2 - 2A - 9I \neq 0$.

24. Dimostrare la relazione $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^4 = I$.

25. Dimostrare che la $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ è periodica di periodo 2.

26. Dimostrare che $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ è nilpotente.

27. Dimostrare che (*a*) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ permutano;

(*b*) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 7/15 & -1/5 & 1/15 \end{bmatrix}$ permutano.

28. Dimostrare che $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ antipermutano, e che $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

29. Si dimostri che ciascuna delle $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ antipermuta con le altre.

30. Verificare che le sole matrici che permutino con ogni matrice quadrata di ordine n sono le matrici quadrate scalari di ordine n.

31. (*a*) Trovare tutte le matrici che permutano con $\text{diag}(1, 2, 3)$.

(*b*) Trovare tutte quelle che permutano con $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Risp. (*a*) $\text{diag}(a, b, c)$, in cui a, b, c sono arbitrari.

32. Dimostrare che: (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ è l'inversa di $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ è l'inversa di $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

33. Fissiamo $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ per trovare l'inversa di $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. *Risp.* $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.

34. Si dimostri che l'inversa di una matrice diagonale A i cui elementi diagonali siano tutti diversi da zero, è ancora una matrice diagonale; e gli elementi diagonali di questa sono gli inversi di quelli di A, nello stesso ordine. In tal modo, l'inversa di I_n è I_n.

35. Dimostrare che $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ sono involutorie.

36. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ A_{21} & -I_2 \end{bmatrix}$ per partizione. Dimostrare che $A^2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = I_4$.

37. Verificare: (a) $(A')' = A$, (b) $(kA)' = kA'$, (c) $(A^p)' = (A')^p$ per p intero positivo.

38. Verificare che $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. *Traccia*: Scrivere $ABC = (AB)C$.

39. Si verifichi: (a) $(A^{-1})^{-1} = A$, (b) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, (c) $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$ con p intero positivo.

40. Dimostrare che ogni matrice simmetrica reale è Hermitiana.

41. Dimostrare che: (a) $\overline{(\bar{A})} = A$, (b) $\overline{(A+B)} = \bar{A} + \bar{B}$, (c) $\overline{(kA)} = \bar{k}\,\bar{A}$, (d) $\overline{(AB)} = \bar{A}\,\bar{B}$.

42. Dimostrare che: (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix}$ è Hermitiana,

(b) $B = \begin{bmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{bmatrix}$ è anti-Hermitiana,

(c) la iB è Hermitiana,

(d) $\bar{A}$ è Hermitiana e $\bar{B}$ è anti-Hermitiana.

43. Se A è quadrata di ordine n, dimostrare che: (a) AA' e $A'A$ sono simmetriche, (b) $A+\bar{A}'$, $A\bar{A}'$ e $\bar{A}'A$ sono Hermitiane.

44. Verificare che se H è Hermitiana ed A è una qualsiasi matrice conformabile, allora $(\bar{A})'HA$ è Hermitiana.

45. Si verifichi che ogni matrice Hermitiana A può essere scritta come $B+iC$, ove B è reale e simmetrica mentre C è reale ed emisimmetrica.

46. Verificare: (a) Ogni matrice anti-Hermitiana A si può scrivere come $A = B+iC$, in cui B è reale ed emisimmetrica mentre C è reale e simmetrica. (b) $\bar{A}'A$ è reale solo ed unicamente nel caso in cui B e C anticommutano.

47. Verificare che se A e B permutano, lo stesso vale per A^{-1} e B^{-1}, A' e B', $\bar{A}'$ e $\bar{B}'$.

48. Dimostrare che per m e n interi positivi A^m e B^n permutano se permutano A e B.

49. Dimostrare che: (a) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$.

50. Si verifichi che se A è simmetrica o emisimmetrica, allora $AA' = A'A$ e A^2 sono simmetriche.

51. Verificare che se A è simmetrica, lo è anche $aA^p + bA^{p-1} + \ldots + gI$, in cui $a, b, \ldots, g$ sono scalari e p è un intero positivo.

52. Dimostrare che ogni matrice quadrata A può essere scritta come $A = B + C$, dove B è Hermitiana e C è anti-Hermitiana.

53. Si verifichi che se A è reale ed emisimmetrica, ovvero se è complessa ed anti-Hermitiana, allora $\pm iA$ sono Hermitiane.

54. Dimostrare che il teorema del Problema 52 può esser posto nella forma:
Ogni matrice quadrata A può essere scritta come: $A = B + iC$, ove B e C sono Hermitiane.

55. Verificare: Se A e B sono tali che $AB = A$, e $BA = B$, allora: (a) $B'A' = A'$ e $A'B' = B'$, (b) A' e B' sono idempotenti, (c) $A = B = I$ nel caso che A abbia una inversa.

56. Dimostrare che, nel caso di A involutoria, $\frac{1}{2}(I+A)$ e $\frac{1}{2}(I-A)$ sono idempotenti, e $\frac{1}{2}(I+A)\cdot\frac{1}{2}(I-A) = 0$.

57. Se la matrice A, quadrata di ordine n, ha una inversa A^{-1}, dimostrare che:
(a) $(A^{-1})' = (A')^{-1}$, (b) $(\bar{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$, (c) $(\bar{A}')^{-1} = \overline{(A^{-1})'}$.
Traccia: Dalla trasposta di $AA^{-1} = I$, si ottenga $(A^{-1})'$ come inversa di A'.

58. Si trovino tutte le matrici che permutano con: (a) $\text{diag}(1, 1, 2, 3)$, (b) $\text{diag}(1, 1, 2, 2)$.
Risp. (a) $\text{diag}(A, b, c)$, (b) $\text{diag}(A, B)$ nelle quali A e B sono matrici quadrate di ordine 2 con elementi arbitrari, e b, c sono scalari.

59. Se $A_1, A_2, \ldots, A_s$ sono matrici scalari di ordine rispettivo $m_1, m_2, \ldots, m_s$, trovare tutte le matrici che permutano con $\text{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)$.
Risp. $\text{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_s)$, essendo $B_1, B_2, \ldots, B_s$ rispettivamente di ordine $m_1, m_2, \ldots, m_s$, e con elementi arbitrari.

60. Se $AB = 0$, in cui A e B sono delle matrici quadrate di ordine n diverse da zero, allora A e B si dicono divisori di zero. Si dimostri che le matrici A e B del Problema 21 sono divisori di zero.

61. Se $A = \text{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)$ e $B = \text{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_s)$, in cui A_i e B_i sono dello stesso ordine, $(i = 1, 2, \ldots, s)$, si dimostri che:
(a) $A + B = \text{diag}(A_1+B_1, A_2+B_2, \ldots, A_s+B_s)$
(b) $AB = \text{diag}(A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_sB_s)$
(c) $\text{tr}\, AB = \text{tr}\, A_1B_1 + \text{tr}\, A_2B_2 + \ldots + \text{tr}\, A_sB_s$.

62. Verificare che se A e B sono matrici quadrate emisimmetriche di ordine n, AB è simmetrica solo ed unicamente nel caso in cui A e B permutino.

63. Dimostrare che se A è quadrata di ordine n e $B = rA + sI$, in cui r e s sono scalari, A e B permutano.

64. Siano A e B due matrici quadrate di ordine n e siano r_1, r_2, s_1, s_2 degli scalari tali che $r_1s_2 \neq r_2s_1$. Dimostrare che $C_1 = r_1A + s_1B$, $C_2 = r_2A + s_2B$ permutano solo ed unicamente nel caso in cui permutano A e B.

65. Dimostrare che la matrice quadrata A di ordine n non ha inversa quando: (*a*) possiede una riga (o colonna) di elementi nulli; (*b*) possiede due righe (o colonne) identiche; (*c*) possiede una riga (o colonna) che è somma di due altre righe (o colonne).

66. Se A e B sono matrici quadrate di ordine n ed A possiede una inversa, si dimostri:

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$$

CAPITOLO 3

Determinante di una matrice quadrata

PERMUTAZIONI. Consideriamo le 3! = 6 permutazioni dei numeri interi 1, 2, 3 presi insieme:

(3.1) 123 132 213 231 312 321

ed otto delle 4! = 24 permutazioni dei numeri interi 1, 2, 3, 4 presi insieme:

(3.2)
1234 2134 3124 4123
1324 2314 3214 4213

Se in una data permutazione l'intero più grande precede il più piccolo, diciamo che quella è un'inversione. Se in una permutazione il numero di inversioni è pari (o dispari), la permutazione si dice pari (o dispari). Per esempio, nella (3.1) la permutazione 123 è pari perché non vi è inversione; la permutazione 132 è dispari perché in essa il 3 precede il 2; la 312 è pari perché in essa il 3 precede l'1 e precede il 2. Nella (3.2) la permutazione 4213 è pari perché il 4 precede il 2, l'1, il 3; e il 2 precede l'1.

DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA. Consideriamo la matrice quadrata di ordine n:

$$(3.3) \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11}\,a_{12}\,a_{13} \cdots\, a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\,a_{23} \cdots\, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,a_{n2}\,a_{n3} \cdots\, a_{nn} \end{bmatrix}$$

nonché un prodotto:

$$(3.4) \qquad a_{1j_1}\, a_{2j_2}\, a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}$$

di n dei suoi elementi, scelti in modo che un elemento – e uno solo – provenga da ciascuna riga e uno solo provenga da ciascuna colonna. Nella (3.4) per convenienza i fattori sono stati scelti in modo che la sequenza del primo pedice sia nell'ordine naturale $1, 2, \ldots, n$; la sequenza $j_1, j_2, \ldots, j_n$ del secondo pedice è allora qualcuna delle $n!$ permutazioni dei numeri interi $1, 2, \ldots, n$. (Il lavoro su questo argomento viene facilitato confrontandolo con un prodotto costruito in modo che la sequenza dei secondi pedici sia nell'ordine naturale.)

Per una data permutazione $j_1, j_2, \ldots, j_n$ dei secondi pedici, definiamo una $\epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} = +1$ o -1 a seconda che la permutazione sia pari o dispari, e facciamo il prodotto con il segno:

$$(3.5) \qquad \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n}\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

Per determinante di A, indicato con $|A|$, s'intende la somma di tutti i prodotti di diverso segno di forma (3.5), detti termini di $|A|$, che si possono formare con gli elementi di A; perciò,

$$(3.6) \qquad |A| = \sum_{\rho} \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n}\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

in cui la sommatoria è estesa a $\rho = n!$ permutazioni $j_1 j_2 \ldots j_n$ degli interi $1, 2, \ldots n$.

Il determinante di una matrice quadrata di ordine n si chiama determinante di ordine n.

DETERMINANTI DI ORDINE DUE E TRE. Dalla (3.6) si ricava, per $n = 2$ e $n = 3$:

$$(3.7) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \epsilon_{12}\, a_{11}a_{22} + \epsilon_{21}\, a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

e

$$(3.8) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \epsilon_{123}\, a_{11}a_{22}a_{33} + \epsilon_{132}\, a_{11}a_{23}a_{32} + \epsilon_{213}\, a_{12}a_{21}a_{33} + \epsilon_{231}\, a_{12}a_{23}a_{31} + \epsilon_{312}\, a_{13}a_{21}a_{32} + \epsilon_{321}\, a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Esempio 1.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4 - 6 = -2$

(b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 - (-1)3 = 0 + 3 = 3$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2(0\cdot 0 - 1\cdot 1) - 3(1\cdot 0 - 1\cdot 2) + 5(1\cdot 1 - 0\cdot 2) = 2(-1) - 3(-2) + 5(1) = 9$

(d) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 2\{0(-6) - (-2)(-5)\} - (-3)\{1(-6) - (-2)0\} + (-4)\{1(-5) - 0\cdot 0\}$

$= -20 - 18 + 20 = -18$

Vedere il Problema 1.

PROPRIETA' DEI DETERMINANTI. In questa parte, A è la matrice quadrata il cui determinante $|A|$ è dato dalla (3.6).

Supponiamo che ciascun elemento della i-ma riga (o ciascun elemento della i-ma colonna) sia zero. Dal momento che ogni termine della (3.6) contiene un elemento di questa riga (o colonna), ogni membro della sommatoria è zero; abbiamo così che:

I. Se ogni elemento di una riga (o colonna) di una matrice quadrata A è zero, allora è $|A| = 0$.

Consideriamo la trasposta A' di A. Si vede subito che ogni termine della (3.6) si ottiene dalla matrice A' scegliendo opportunamente i fattori nell'ordine della prima, seconda, ... colonna. Ne deriva:

II. Se A è una matrice quadrata, allora $|A'| = |A|$; ovvero: per ogni teorema che riguarda le righe di un determinante c'è un teorema corrispondente che riguarda le colonne, e viceversa.

Indichiamo con B la matrice che si ottiene moltiplicando ciascun elemento della i-ma riga di A per uno scalare k. Poiché ogni termine nello sviluppo di $|B|$ contiene uno ed un solo elemento della sua i-ma riga, ovvero uno ed un solo elemento che abbia k per fattore:

$$|B| = k \sum_{\rho} \{\epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}\} = k\,|A|$$

Quindi:

III. Se ogni elemento di una riga (o colonna) di un determinante $|A|$ viene moltiplicato per uno scalare k, il determinante stesso risulta moltiplicato per k; se ogni elemento di una riga (o colonna) di un determinante $|A|$ ha k per proprio fattore, allora k può venir messo a fattore di $|A|$. Per esempio:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}$$

Indichi B la matrice che si ottiene da A scambiandone la riga i-ma con la riga $(i+1)$-ma. Nella (3.6) ogni prodotto del determinante $|A|$ è un prodotto del $|B|$, e viceversa. Per questo, con eventuali eccezioni per il segno, la (3.6) è lo sviluppo di $|B|$. Contando le inversioni dei pedici di ciascun termine della (3.6) come termine di $|B|$, i prima di $i+1$ nei pedici di riga denota una inversione. Allora ogni prodotto nella (3.6) con il segno cambiato è un termine di $|B|$ ed è $|B| = -|A|$. Allora:

IV. Se B viene ottenuta da A scambiandone a due a due le righe (o colonne) adiacenti, allora $|B| = -|A|$.

Come conseguenza del teorema **IV**, si ha:

V. Se B è ottenuta da A scambiandone a due a due tutte le righe (o colonne), allora $|B| = -|A|$.

VI. Se B è ottenuta da A trasportando la sua i-ma riga (o colonna) al di là di p righe (o colonne), allora è: $|B| = (-1)^p |A|$.

VII. Se due righe (o colonne) di A sono identiche, è $|A| = 0$.

Poniamo che ogni elemento della prima riga di A sia espresso in forma binomia $a_{1j} = b_{1j} + c_{1j}$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Allora sarà:

$$|A| = \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} (b_{1j_1} + c_{1j_1}) a_{2j_2} a_{3j_3} \ldots a_{nj_n}$$

$$= \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} b_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \ldots a_{nj_n} + \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} c_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \ldots a_{nj_n}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

E, in generale:

VIII. Se ciascun elemento della i-ma riga (o colonna) di A è la somma di p termini, allora $|A|$ può essere espresso come somma di p determinanti. Gli elementi delle i-me righe (o colonne) di questi determinanti sono rispettivamente i primi, secondi, . . ., p-mi termini delle somme; tutte le rimanenti righe (o colonne) sono quelle di A.

Il teorema più utile è il seguente:

IX. Se B può essere ottenuta da A aggiungendo agli elementi della i-ma riga (o colonna) di questa uno scalare multiplo degli elementi corrispondenti di un'altra riga (o colonna), allora $|B| = |A|$. Per esempio:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{21} & a_{32}+ka_{22} & a_{33}+ka_{23} \end{vmatrix}$$

Vedere i Problemi 2-7.

MINORI PRIMO E COFATTORI. Sia A la matrice quadrata di ordine n (3.3) il cui determinante $|A|$ è dato dalla (3.6). Quando si sono tolti dalla A gli elementi della sua i-ma riga e j-ma colonna, il determinante della matrice quadrata di ordine $(n-1)$ che ne risulta è il minore, primo di A, ovvero di $|A|$, e si indica con $|M_{ij}|$.

Esso viene indicato più spesso come minore di a_{ij}. Il minore con segno $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ è detto cofattore di a_{ij} e si indica con α_{ij}.

Esempio 2. Se $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

e

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = |M_{11}|, \quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|M_{12}|,$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = |M_{13}|$$

allora la (3.8) varrà:

$$|A| = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$$
$$= a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13}$$

Nel Problema 9 si dimostra:

X. Il valore del determinante $|A|$, — essendo A la matrice (3.3) — è la somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando ciascun elemento di una riga (o colonna) di $|A|$ per il suo cofattore, ovvero:

$$(3.9) \qquad |A| = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{in}\alpha_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{ik}$$

$$(3.10) \qquad |A| = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\alpha_{kj} \qquad (i, j, = 1, 2, \ldots, n)$$

Mediante il Teorema **VII** si può dimostrare che:

XI. La somma dei prodotti ottenuti moltiplicando gli elementi di una riga (o colonna) di una matrice quadrata A di ordine n per i corrispondenti cofattori di un'altra riga (o colonna) di A, è zero.

Esempio 3. Se A è la matrice dell'esempio 2, abbiamo:

e: $a_{31}\alpha_{31} + a_{32}\alpha_{32} + a_{33}\alpha_{33} = |A|$

$a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + a_{32}\alpha_{32} = |A|$

mentre è:

$a_{31}\alpha_{21} + a_{32}\alpha_{22} + a_{33}\alpha_{23} = 0$

e ancora:

$a_{12}\alpha_{13} + a_{22}\alpha_{23} + a_{32}\alpha_{33} = 0$

Vedere i problemi 10-11.

MINORI E COMPLEMENTI ALGEBRICI. Consideriamo la matrice (3.3). Siano $i_1, i_2, \ldots, i_m$, — ordinati per grandezza crescente — m $(1 \leq m < n)$ degli indici 1, 2, . . ., n delle righe; e siano $j_1, j_2, \ldots, j_m$ — anch'essi ordinati in senso crescente — m degli indici delle colonne. I rimanenti indici di righe e colonne — ordinati per grandezza crescente — siano rispettivamente $i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n$ e $j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n$. Simile separazione degli indici di righe e colonne determina unicamente due matrici; la:

$$(3.11) \qquad A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m} = \begin{bmatrix} a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} & \cdots & a_{i_1, j_m} \\ a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} & \cdots & a_{i_2, j_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_m, j_1} & a_{i_m, j_2} & \cdots & a_{i_m, j_m} \end{bmatrix}$$

e la:

$$(3.12) \qquad A^{j_{m+1},j_{m+2},\ldots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\ldots,i_n} = \begin{bmatrix} a_{i_{m+1},j_{m+1}} & a_{i_{m+1},j_{m+2}} & \cdots & a_{i_{m+1},j_n} \\ a_{i_{m+2},j_{m+1}} & a_{i_{m+2},j_{m+2}} & \cdots & a_{i_{m+2},j_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_n,j_{m+1}} & a_{i_n,j_{m+2}} & \cdots & a_{i_n,j_n} \end{bmatrix}$$

chiamate sottomatrici di A.

Il determinante di ognuna di queste è chiamato minore di A; i due minori

$$\left| A^{j_1,j_2,\ldots,j_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \right| \quad \text{e} \quad \left| A^{j_{m+1},j_{m+2},\ldots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\ldots,i_n} \right|$$

si dicono minori complementari di A, ciascuno essendo il complemento dell'altro.

Esempio 3. Per la matrice quadrata di ordine 5: $A = \left[a_{ij}\right]$.

$$|A^{1,3}_{2,5}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{51} & a_{53} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad |A^{2,4,5}_{1,3,4}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

sono una coppia di minori complementari.

Sia

$$(3.13) \qquad p = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m$$

e

$$(3.14) \qquad q = i_{m+1} + i_{m+2} + \cdots + i_n + j_{m+1} + j_{m+2} + \cdots + j_n$$

Il minore con segno $(-1)^p \left| A^{j_1,j_2,\ldots,j_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \right|$ si chiama complemento algebrico del minore $\left| A^{j_{m+1},j_{m+2},\ldots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\ldots,i_n} \right|$

e $(-1)^q \left| A^{j_{m+1},j_{m+2},\ldots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\ldots,i_n} \right|$ si chiama complemento algebrico di:

$$\left| A^{j_1,j_2,\ldots,j_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \right|$$

Esempio 4. Riferendoci ai minori dell'esempio 3: $(-1)^{2+5+1+3}|A^{1,3}_{2,5}| = -|A^{1,3}_{2,5}|$ è il complemento algebrico di $|A^{2,4,5}_{1,3,4}|$, e $(-1)^{1+3+4+2+4+5}|A^{2,4,5}_{1,3,4}| = -|A^{2,4,5}_{1,3,4}|$, è ugualmente complemento algebrico di $|A^{1,3}_{2,5}|$. Si noti che il segno dato ai due minori complementari è lo stesso. Questo è sempre vero?

Quando è $m = 1$, la (3.11) diventa $A^{j_1}_{i_1} = \left[a_{i_1j_1}\right]$ e $|A^{j_1}_{i_1}| = a_{i_1j_1}$, cioè un elemento di A. Il minore complementare $\left|A^{j_2,j_3,\ldots,j_n}_{i_2,i_3,\ldots,i_n}\right|$ diventa $|M_{i_1j_1}|$ con la notazione del paragrafo precedente; e complemento algebrico è il cofattore stesso $\alpha_{i_1j_1}$.

Un minore di A, i cui elementi diagonali siano anche elementi diagonali della A stessa, è detto minore principale di A. Il complemento di un minore principale di A è ancora un minore principale di A; il complemento algebrico di un minore principale è suo complemento.

Esempio 5. Per la matrice quadrata di ordine 5 $A = \left[a_{ij}\right]$.

$$|A^{1,3}_{1,3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad |A^{2,4,5}_{2,4,5}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

sono una coppia di minori principali complementari di A. Qual è il complemento algebrico di ciascuno?

I termini: minore, minore complementare, complemento algebrico e minore principale come precedentemente definiti per una matrice quadrata A verranno anche usati, senza cambiamenti, in relazione ad $|A|$.

Vedere i Problemi 12-13.

PROBLEMI RISOLTI

1. (a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 3(-1) = 11$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (1)(4\cdot 7 - 5\cdot 6) - 0 + 2(3\cdot 6 - 4\cdot 5) = -2 - 4 = -6$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = 1(4\cdot 21 - 15\cdot 6) + 6(3\cdot 6 - 4\cdot 5) = -18$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3\cdot 3 - 5\cdot 1) = 4$

2. Sommando agli elementi della prima colonna gli elementi corrispondenti delle altre colonne si ha:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

per il Teorema I.

3. Sommando la seconda colonna alla terza, estraendo il fattore comune alla terza colonna stessa e applicando il Teorema VII si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Sommando la prima e seconda riga alla terza, e portando fuori il fattore comune 2; sottraendo alla terza la seconda riga; sottraendo dalla prima la terza e dalla seconda la prima, per portare infine la terza riga sopra le altre, si ha:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. Senza sviluppare, si dimostri che: $|A| = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = -(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$.

Sottraendo dalla prima la seconda riga, si ha:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^2-a_2^2 & a_1-a_2 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = (a_1-a_2)\begin{vmatrix} a_1+a_2 & 1 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{dal Teorema III}$$

e a_1-a_2 è un fattore di $|A|$ Ugualmente sono fattori a_2-a_3 e a_3-a_1. Ma $|A|$ è del terzo ordine, per cui:

$$(i) \qquad |A| = k(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$$

Il prodotto degli elementi diagonali $a_1^2a_2$, è un termine di $|A|$ e, secondo la (i), questo termine è $-ka_1^2a_2$. In tal modo $k=-1$ e $|A| = -(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$. Si noti che $|A|$ va a zero solo ed esclusivamente se due fra a_1, a_2, a_3 sono uguali.

6. Dimostrare che se A è emisimmetrica e di ordine dispari $2p-1$, allora $|A| = 0$.

Poiché A è emisimmetrica, $A' = -A$. E' allora $|A'| = |-A| = (-1)^{2p-1}|A| = -|A|$. Ma, per il Teorema **II**, $|A'| = |A|$; quindi $|A| = -|A|$ e $|A| = 0$.

7. Si dimostri che se A è hermitiana, il suo determinante $|A|$ è un numero reale.

Essendo A hermitiana, $\bar{A} = A'$, e $|\bar{A}| = |A'| = |A|$ per il Teorema **II**. Ma se è:

$$|A| = \sum_\rho \epsilon_{j_1j_2\ldots j_n} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = a+bi$$

allora è:

$$|\bar{A}| = \sum_\rho \epsilon_{j_1j_2\ldots j_n} \bar{a}_{1j_1}\bar{a}_{2j_2}\cdots \bar{a}_{nj_n} = a-bi$$

Ma perché sia $|\bar{A}| = |A|$ dev'essere $b=0$; e quindi $|A|$ è un numero reale.

8. Per la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, si trova che:

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad \alpha_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad \alpha_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad \alpha_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \qquad \alpha_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \qquad \alpha_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad \alpha_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

Si noti che i segni da attribuire ai minori degli elementi – quando si formano i cofattori – seguono l'andamento:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

schema in cui ogni segno occupa proprio la posizione che l'elemento, di cui si vuole il cofattore, occupa in A. Si tracci lo schema dei segni per una matrice quadrata di ordine 5.

9. Dimostrare che il valore del determinante A di una matrice quadrata A di ordine n è la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando ogni elemento di una riga (o colonna) di A per il suo cofattore.

Dimostriamolo per una riga. I termini della **(3.6)** aventi a_{11} per fattore sono:

$$(a) \qquad a_{11} \sum \epsilon_{1,\, j_2j_3\ldots j_n} a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$$

Ora, $\epsilon_{1,\, j_2j_3\ldots j_n} = \epsilon_{j_2j_3\ldots j_n}$ giacché in una permutazione $1, j_1, j_2, \ldots j_n$, il numero 1 si trova nell'ordine naturale. Allora la (a) può essere scritta come:

$$(b) \qquad a_{11} \sum_\sigma \epsilon_{j_2j_3\ldots j_n} a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$$

nella quale la sommatoria è estesa alle $\sigma = (n-1)!$ permutazioni degli interi 2, 3, . . ., n; e di conseguenza si può scrivere anche:

$$(c) \qquad a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}|M_{11}|$$

Consideriamo ora la matrice B che si ottiene dalla A spostandone la s-ma colonna sopra le prime $s-1$. Per il Teorema **VI** sarà $|B| = (-1)^{s-1} A$. Inoltre l'elemento contenuto nella prima riga e prima colonna di B è a_{1s} e il minore di a_{1s} nella B è proprio il minore M_{1s} di a_{1s} nella A. Seguendo il ragionamento che ci ha dato la (c), i termini di $a_{1s}|M_{1s}|$ sono tutti quelli di B che hanno a_{1s} a fattore, ed anche tutti quelli di $(-1)^{s-1}|A|$ aventi sempre a_{1s} per fattore. Così i termini di $a_{1s}\{(-1)^{s-1} M_{1s}\}$ sono tutti quelli di $|A|$ che hanno a_{1s} a fattore. E allora è:

$$\textbf{(3.15)} \qquad |A| = a_{11}\{(-1)^{1+1}|M_{11}|\} + a_{12}\{(-1)^{1+2}|M_{12}|\} + \cdots + a_{1s}\{(-1)^{1+s}|M_{1s}|\} + \cdots + a_{1n}\{(-1)^{1+n}|M_{1n}|\}$$

$$= a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + \cdots + a_{1n}\alpha_{1n}$$

dal momento che $(-1)^{s-1} = (-1)^{s+1}$. Abbiamo così ottenuto la **(3.9)**, con $i=1$. Potremo dire che la **(3.15)** è lo sviluppo di $|A|$ secondo la prima riga.

Lo sviluppo di $|A|$ secondo la r-ma riga (cioè la **(3.9)**, per $i=r$) si ottiene ripetendo i ragionamenti già fatti. Sia B la matrice che si ricava da A spostandone la r-ma riga sulle prime $r-1$, e spostandone poi la s-ma colonna sulle prime $s-1$. Allora:

$$|B| = (-1)^{r-1}\cdot(-1)^{s-1}|A| = (-1)^{r+s}|A|$$

L'elemento collocato nella prima riga e prima colonna di B è a_{rs}; il minore di a_{rs} in B è proprio il minore di a_{rs} in A. In tal modo, i termini di:

$$a_{rs}\{(-1)^{r+s}|M_{rs}|\}$$

sono tutti quelli di $|A|$ aventi a_{rs} come fattore. Allora:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}\{(-1)^{r+k}|M_{rk}|\} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}\alpha_{rk}$$

ed abbiamo la **(3.9)** per $i=r$.

10. Se α_{ij} è il cofattore di a_{ij} nella matrice quadrata di ordine n: $A = [a_{ij}]$, dimostrare che vale la:

$$(i) \qquad k_1\alpha_{1j} + k_2\alpha_{2j} + \cdots + k_n\alpha_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & k_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & k_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & k_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Questa relazione deriva dalla **(3.10)**, nella quale si sostituisca a_{1j} con k_1, a_{2j} con $k_2, \ldots, a_{nj}$ con k_n.

In queste sostituzioni non è interessato alcuno dei cofattori $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj}$, dato che nessuno di essi contiene un elemento della j-ma colonna di A.

Per il Teorema **VII**, il determinante (i) è 0 quando $k_r = a_{rs}$, per $(r = 1, 2, \ldots, n$ e $s \neq j)$. Dai Teoremi **VIII** e **VII** discende invece che il determinante suddetto vale $|A|$ se $k_r = a_{rj} + ka_{rs}$, per $(r = 1, 2, \ldots, n$ e $s \neq j)$.

Si scriva l'uguaglianza – simile alla (i) – che si ottiene dalla **(3.9)** sostituendo gli elementi della i-ma riga di A con $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

11. Si valuti: (a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad (c)$ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ $\quad (e)$ $|A| = \begin{vmatrix} 28 & 25 & 38 \\ 42 & 38 & 65 \\ 56 & 47 & 83 \end{vmatrix}$

(b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ $\quad (d)$ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

(a) Sviluppando lungo la seconda colonna (Teorema **X**):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + a_{32}\alpha_{32} = 0\cdot\alpha_{12} + 0\cdot\alpha_{22} + (-5)\alpha_{32}$$

$$= -5(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4-6) = -10$$

(b) Sottraendo due volte la seconda colonna dalla terza (Teorema **IX**):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8-2\cdot4 \\ -2 & 1 & 5-2\cdot1 \\ -3 & 2 & 4-2\cdot2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3(14) = -42$$

(c) Sottraendo dalla prima la seconda riga moltiplicata per 3 e sommando il doppio della seconda riga alla terza:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-3(1) & 4-3(2) & 5-3(3) \\ 1 & 2 & 3 \\ -2+2(1) & 5+2(2) & -4+2(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(-4+36) = -32$$

(d) Sottraendo la prima colonna dalla seconda, e continuando poi come in (c):

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & -11 & 3 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-2(1) & 1 & -4+4(1) \\ 5-2(-11) & -11 & 3+4(-11) \\ 4-2(-2) & -2 & -3+4(-2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 27 & -11 & -41 \\ 8 & -2 & -11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 27 & -41 \\ 8 & -11 \end{vmatrix} = -31$$

(e) Mettendo a fattore comune 14 nella prima colonna, e applicando il Teorema **IX** per ridurre gli elementi delle colonne rimanenti:

$$|A| = \begin{vmatrix} 28 & 25 & 38 \\ 42 & 38 & 65 \\ 56 & 47 & 83 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 2 & 25 & 38 \\ 3 & 38 & 65 \\ 4 & 47 & 83 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 2 & 25-12(2) & 38-20(2) \\ 3 & 38-12(3) & 65-20(3) \\ 4 & 47-12(4) & 83-20(4) \end{vmatrix}$$

$$= 14\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 9 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -14(-1-54) = 770$$

12. Si dimostri che p e q – dalle **(3.13)** e **(3.14)** – sono pari entrambi o entrambi dispari.

Dal momento che ciascun indice di riga (o di colonna) si trova in p o in q, ma mai contemporaneamente in entrambe:

$$p + q = (1+2+\cdots+n) + (1+2+\cdots+n) = 2\cdot\tfrac{1}{2}n(n+1) = n(n+1)$$

Ora $p+q$ è pari (o è pari n o lo è $n+1$); perciò p e q sono o entrambi pari o entrambi dispari. Allora è: $(-1)^p = (-1)^q$ e soltanto uno dei due va calcolato.

13. Nella matrice $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{bmatrix}$, il complemento algebrico di $|A_{2,3}^{2,4}|$ è:

$$(-1)^{2+3+2+4}|A_{1,4,5}^{1,3,5}| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 16 & 18 & 20 \\ 21 & 23 & 25 \end{vmatrix} \qquad \text{(vedere Problema 12)}$$

e il complemento algebrico di $|A_{1,4,5}^{1,3,5}|$ è $-|A_{2,3}^{2,4}| = -\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 12 & 14 \end{vmatrix}$.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

14. Dimostrare che la permutazione 12534 degli interi 1, 2, 3, 4, 5 è pari; la 24135 è dispari; la 41532 è pari, la 53142 è dispari, e la 52314 è pari.

15. Elencare la serie completa delle permutazioni di 1, 2, 3, 4 presi insieme e dimostrare che metà sono pari e metà dispari.

16. Siano a, b, c, d, e gli elementi diagonali di una matrice quadrata A di ordine 5. Dimostrare, usando la **(3.6)**, che quando A è diagonale, o triangolare alta, o triangolare bassa, allora è $|A| = abcde$.

17. Date le $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, dimostrare che è: $AB \neq BA \neq A'B \neq AB' \neq A'B' \neq B'A'$ ma che il determinante di ciascun prodotto è sempre 4.

18. Valutare come nel Problema 1:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27$ $\quad (b)$ $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$ $\quad (c)$ $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$

19. (*a*) Si valuti $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = -4.$

(*b*) Indichiamo con $|B|$ il determinante ottenuto da $|A|$ moltiplicandone per 5 gli elementi della seconda colonna. Si valuti $|B|$ per verificare il Teorema **III**.

(*c*) Indicare con $|C|$ il determinante ottenuto da $|A|$ scambiandone prima e terza colonna, calcolando $|C|$ per verificare il Teorema **V**.

(*d*) Dimostrare che $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$. verificando in tal modo il Teorema **VIII**.

(*e*) Si ottenga da $|A|$ il determinante $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ sottraendo gli elementi della prima colonna, moltiplicati per tre, dai corrispondenti elementi della terza. Valutare $|D|$ (per verificare il Teorema **IX**).

(*f*) Si sottragga in $|A|$ il doppio della prima riga dalla seconda, e dalla terza la prima moltiplicata per quattro. Valutare il determinante che ne risulta.

(*g*) In $|A|$ moltiplicare la prima colonna per tre e sottrarne la terza, verificando il valore ottenuto per dimostrare che $|A|$ è triplicato. Paragonare con il caso (*e*). Non si confonda (*e*) con (*g*).

20. Se A è una matrice quadrata di ordine n e k è uno scalare, usare la (3.6) per dimostrare che $|kA| = k^n|A|$.

21. Dimostrare: (*a*) Se $|A| = k$, allora è: $|\bar{A}| = \bar{k} = |\bar{A}'|$.

(*b*) Se A è anti-Hermitiana, allora: o $|A|$ è reale, o è un numero immaginario puro.

22. (*a*) Trovare il numero di scambi fra righe (o colonne) adiacenti necessario a ricavare B dalla A nel Teorema **V**, dimostrando così il teorema.

(*b*) Lo stesso per il Teorema **VI**.

23. Dimostrare il Teorema **VII**. *Traccia*: Scambiare le righe identiche e applicare il Teorema **V**.

24. Dimostrare che se le righe (o le colonne) di una matrice quadrata A sono a due a due proporzionali, allora è $|A| = 0$.

25. Usare i Teoremi **VIII**, **III**, **VII** per dimostrare il Teorema **IX**.

26. Si valutino i determinanti del Problema 18 come si è fatto nel Problema 11.

27. Usare la (3.6) per valutare $|A| = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{vmatrix}$; controllare poi che sia $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$. Così, se $A = diag(A_1, A_2)$, in cui A_1 e A_2 sono matrici quadrate di ordine 2, $|A| = |A_1| \cdot |A_2|$.

28. Dimostrare che il cofattore di ciascun elemento della $\begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ è lo stesso elemento.

29. Si dimostri che il cofattore di un elemento di ciascuna riga della $\begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ è il corrispondente elemento della colonna di numero uguale.

30. Dimostrare: (*a*) Se A è simmetrica, è $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ quando $i \neq j$.

(*b*) Se A è quadrata di ordine n ed è emisimmetrica, vale la $\alpha_{ij} = (-1)^{n-1}\alpha_{ji}$ quando $i \neq j$.

31. Tornando alla matrice A del Problema 8:

(*a*) Dimostrare che $|A| = 1$.

(*b*) Costruire la matrice $C = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$ e dimostrare che $AC = I$.

(*c*) Spiegare perché il risultato (*b*) è conosciuto non appena si conosce l'(*a*).

32. Si moltiplichino rispettivamente per a, b, c le colonne di $|A| = \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$; raccogliere il fattore comune da ciascuna delle righe per mostrare che $|A| = \begin{vmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ca & bc \\ ca & bc & ab \end{vmatrix}$.

33. Senza fare i conti, dimostrare che

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

34. Si dimostri che il determinante quadrato di ordine n

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

35. Dimostrare:

$$\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \dots & a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix} = \{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)\}\{(a_2-a_3)(a_2-a_4)\dots(a_2-a_n)\}\cdots\{a_{n-1}-a_n\}.$$

36. Dimostrare, senza fare lo sviluppo, che: $\begin{vmatrix} na_1+b_1 & na_2+b_2 & na_3+b_3 \\ nb_1+c_1 & nb_2+c_2 & nb_3+c_3 \\ nc_1+a_1 & nc_2+a_2 & nc_3+a_3 \end{vmatrix} = (n+1)(n^2-n+1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

37. Ancora senza sviluppare, si dimostri che l'equazione $\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix} = 0$ ha 0 per radice.

38. Dimostrare che: $\begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix} = b^{n-1}(na+b)$.

CAPITOLO 4

Valutazione dei determinanti

DEI PROCEDIMENTI PER VALUTARE i determinanti di ordine due e tre si sono visti nel cap. 3. Nel Problema 11 venivano illustrati due usi del Teorema IX: (*a*) per ottenere che un elemento sia 1 o −1, nel caso che il determinante dato non contenga simile valore; (*b*) per sostituire con lo 0 un elemento di un determinante dato.

Per i determinanti di ordine più elevato il procedimento generale è di sostituire, applicando più volte il citato Teorema IX, il determinante dato $|A|$ con un altro $|B| = |b_{ij}|$ dotato della proprietà che tutti gli elementi (eccetto uno) di una riga (o colonna) siano zero. Se b_{pq} è l'elemento non nullo e β_{pq} il suo cofattore:

$$|A| \;=\; |B| \;=\; b_{pq}\cdot\beta_{pq} \;=\; (-1)^{p+q}b_{pq}\cdot \text{minore di } b_{pq}$$

Poi il minore di b_{pq} viene trattato allo stesso modo, protraendo il procedimento finché si ottiene un determinante di ordine due o tre.

Esempio 1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2(3) & 3+2(-2) & -2+2(1) & 4+2(2) \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3-3(3) & 2-3(-2) & 3-3(1) & 4-3(2) \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -6 & 8 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 8 & -1 & 8 \\ -6 & 8 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8+8(-1) & -1 & 8+8(-1) \\ -6+8(8) & 8 & -2+8(8) \\ -2+8(4) & 4 & 5+8(4) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 58 & 8 & 62 \\ 30 & 4 & 37 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 58 & 62 \\ 30 & 37 \end{vmatrix} = -286$$

Vedere i Problemi 1-3.

Per determinanti che comprendono elementi del tipo che si vede nel seguente Esempio 2, si può cambiare il metodo così: dividere la prima riga per uno dei suoi elementi non nulli, e continuare finché non si hanno zero elementi in una riga o in una colonna.

Esempio 2.

$$\begin{vmatrix} 0{,}921 & 0{,}185 & 0{,}476 & 0{,}614 \\ 0{,}782 & 0{,}157 & 0{,}527 & 0{,}138 \\ 0{,}872 & 0{,}484 & 0{,}637 & 0{,}799 \\ 0{,}312 & 0{,}555 & 0{,}841 & 0{,}448 \end{vmatrix} = 0{,}921\begin{vmatrix} 1 & 0{,}201 & 0{,}517 & 0{,}667 \\ 0{,}782 & 0{,}157 & 0{,}527 & 0{,}138 \\ 0{,}872 & 0{,}484 & 0{,}637 & 0{,}799 \\ 0{,}312 & 0{,}555 & 0{,}841 & 0{,}448 \end{vmatrix} = 0{,}921\begin{vmatrix} 1 & 0{,}201 & 0{,}517 & 0{,}667 \\ 0 & 0 & 0{,}123 & -0{,}384 \\ 0 & 0{,}309 & 0{,}196 & 0{,}217 \\ 0 & 0{,}492 & 0.680 & 0{,}240 \end{vmatrix}$$

$$= 0{,}921\begin{vmatrix} 0 & 0{,}123 & -0{,}384 \\ 0{,}309 & 0{,}196 & 0{,}217 \\ 0{,}492 & 0{,}680 & 0{,}240 \end{vmatrix} = 0{,}921(-0{,}384)\begin{vmatrix} 0 & -0{,}320 & 1 \\ 0{,}309 & 0{,}196 & 0{,}217 \\ 0{,}492 & 0{,}680 & 0{,}240 \end{vmatrix}$$

$$= 0{,}921(-0{,}384)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0{,}309 & 0{,}265 & 0{,}217 \\ 0{,}492 & 0{,}757 & 0{,}240 \end{vmatrix} = 0{,}921(-0{,}384)\begin{vmatrix} 0{,}309 & 0{,}265 \\ 0{,}492 & 0{,}757 \end{vmatrix}$$

$$= 0{,}921(-0{,}384)(0{,}104) = -0{,}037$$

SVILUPPO DI LAPLACE. Lo sviluppo di un determinante $|A|$ di ordine n lungo una riga (o colonna) è un caso particolare dello sviluppo di Laplace. Invece di una riga di $|A|$ se ne scelgano m, in ordine di grandezza, numerate $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Da queste m righe si possono formare

$$\rho = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\ \ldots\ m} \quad \text{minori} \quad \left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$$

se si fa ogni possibile scelta di m colonne fra le n disponibili. Con questi minori – e i loro complementi algebrici – otteniamo lo sviluppo di Laplace:

$$(4.1) \qquad |A| = \sum_{\rho} (-1)^s \left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right| \cdot \left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right|$$

in cui $s = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m$, essendo estesa la sommatoria alle ρ combinazioni degli indici delle colonne presi in numero di m per volta.

Esempio 3.

Si valuti $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, servendosi di minori delle prime due righe.

Dalla **(4.1)** si ha:

$$|A| = (-1)^{1+2+1+2}\left|A^{1,2}_{1,2}\right|\cdot\left|A^{3,4}_{3,4}\right| + (-1)^{1+2+1+3}\left|A^{1,3}_{1,2}\right|\cdot\left|A^{2,4}_{3,4}\right|$$
$$+ (-1)^{1+2+1+4}\left|A^{1,4}_{1,2}\right|\cdot\left|A^{2,3}_{3,4}\right| + (-1)^{1+2+2+3}\left|A^{2,3}_{1,2}\right|\cdot\left|A^{1,4}_{3,4}\right|$$
$$+ (-1)^{1+2+2+4}\left|A^{2,4}_{1,2}\right|\cdot\left|A^{1,3}_{3,4}\right| + (-1)^{1+2+3+4}\left|A^{3,4}_{1,2}\right|\cdot\left|A^{1,2}_{3,4}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-13)(15) - (8)(-6) + (-8)(-12) + (-1)(23) - (14)(6) + (-8)(16)$$
$$= -286$$

Vedere i Problemi 4-6.

DETERMINANTE DI UN PRODOTTO. Se A e B sono due matrici quadrate di ordine n, allora è:

$$(4.2) \qquad |AB| = |A|\cdot|B|$$

Vedere il Problema 7.

SVILUPPO SECONDO PRIMA RIGA E PRIMA COLONNA. Se $A = [a_{ij}]$ è quadrata di ordine n, è allora:

$$(4.3) \qquad |A| = a_{11}\alpha_{11} - \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{i1}a_{1j}\alpha^{i1}_{1j}$$

in cui α_{11} è il cofattore di a_{11}, e α^{i1}_{1j} è il complemento algebrico del minore $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$ di A.

DERIVATA DI UN DETERMINANTE. La matrice quadrata di ordine n $A = [a_{ij}]$ abbia per elementi delle funzioni differenziabili di una variabile x. Potremo dire allora:

I. La derivata $\frac{d}{dx}|A|$ di $|A|$ rispetto a x è la somma di n determinanti, ottenuti ciascuno sostituendo in tutti i modi possibili gli elementi di una riga (o colonna) di $|A|$ con le loro derivate rispetto a x.

Esempio 4.

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 0 & 2 & 3x^2 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5 + 4x - 12x^2 - 6x^5$$

Vedere il Problema 8.

PROBLEMI RISOLTI

1. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 7 & 4 & -3 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 7-2(2) & 4-2(3) & -3-2(-2) & 10-2(4) \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -286$$

(Si veda l'Esempio 1)

Ci sono naturalmente diversi altri modi per rendere un elemento pari a 1 o a -1; per esempio sottraendo la prima colonna alla seconda o la quarta alla seconda; la prima riga alla seconda, ecc.

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1+1 & 2-2(1) \\ 2 & 3 & 2+2 & -2-2(2) \\ 2 & 4 & 2+2 & 1-2(2) \\ 3 & 1 & 5+3 & -3-2(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 8 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2(4) & 4-2(4) & -6-2(-3) \\ 4 & 4 & -3 \\ 1-3(4) & 8-3(4) & -9-3(-3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -3 \\ -11 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -11 & -4 \end{vmatrix} = -72$$

3. Si valuti: $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{vmatrix}$.

Moltiplichiamo la seconda riga per $1+i$ e la terza per $1+2i$; allora avremo:

$$(1+i)(1+2i)|A| = (-1+3i)|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 2 & 0 & 5-i \\ 5 & -4+7i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 2 & 0 & 5-i \\ 1 & -4+7i & -10+2i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 0 & 8-14i & 25-5i \\ 1 & -4+7i & -10+2i \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+i & 1+2i \\ 8-14i & 25-5i \end{vmatrix} = -6 + 18i$$

e: $|A| = 6$.

4. Dedurre lo sviluppo di Laplace del determinante $|A| = |a_{ij}|$ di ordine n, usando minori di ordine $m<n$.

Si consideri il minore quadrato di ordine m $\left|A^{j_1,j_2,\ldots,j_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right|$ di $|A|$, nel quale gli indici di righe e colonne sono disposti in ordine crescente. Adesso, con i_1-1 scambi di righe adiacenti in $|A|$, la riga numero i_1 diventa prima riga; con altri i_2-2 scambi di righe adiacenti la riga numero i_2 si porta a seconda riga .... e ancora con i_m-m scambi, sempre fra righe adiacenti, la riga numero i_m si porta a m-ma riga. In tal modo, dopo $(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_m-m) = i_1+i_2+\cdots+i_m-\frac{1}{2}m(m+1)$ scambi fra righe adiacenti, quelle con i numeri $i_1, i_2, \ldots, i_m$ occupano la posizione delle prime m righe. Similmente dopo $j_1+j_2+\cdots+j_m-\frac{1}{2}m(m+1)$ scambi fra colonne adiacenti, le colonne con i numeri $j_1, j_2, \ldots, j_m$ occuperanno la posizione delle prime m colonne. Da questi scambi fra righe e colonne adiacenti risulta che il minore scelto in principio viene a occupare l'angolo superiore sinistro del determinante – mentre il suo complemento m occuperà l'angolo inferiore destro. In più, $|A|$ avrà cambiato segno per $\sigma = i_1+i_2+\cdots+i_m+j_1+j_2+\cdots+j_m-m(m+1)$ volte, il che equivale a $s = i_1+i_2+\cdots+i_m+j_1+j_2+\cdots+j_m$ cambiamenti di segno. In tal modo:

$$\left|A^{j_1,j_2,\ldots,j_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right| \cdot \left|A^{j_{m+1},j_{m+2},\ldots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\ldots,i_n}\right| \text{ dà luogo a } m!(n-m)! \text{ termini di } (-1)^s|A|, \text{ mentre:}$$

$$(a) \qquad (-1)^s\left|A^{j_1,j_2,\ldots,j_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right| \cdot \left|A^{j_{m+1},j_{m+2},\ldots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\ldots,i_n}\right| \text{ dà luogo a } m!(n-m)! \text{ termini di } |A|$$

Manteniamo fissi $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Da queste righe si potranno scegliere $\rho = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\ldots m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ differenti minori quadrati di ordine m. Ciascuno di questi minori, moltiplicato per il suo complemento algebrico, dà luogo a $m!(n-m)!$ termini di $|A|$. E dal momento che, dato il modo in cui sono stati fatti, non vi sono in questi prodotti termini doppi di $|A|$, sarà:

$$|A| = \sum_{\rho}(-1)^s\left|A^{j_1,j_2,\ldots,j_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right| \cdot \left|A^{j_{m+1},j_{m+2},\ldots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\ldots,i_n}\right|$$

in cui $s = i_1+i_2+\cdots+i_m+j_1+j_2+\cdots+j_m$, e la sommatoria si estende alle ρ differenti scelte $j_1, j_2, \ldots, j_m$ degli indici di colonna.

5. Valutare $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, usando minori delle prime due colonne.

$$|A| = (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4+1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)(1) + (-2)(1) - (5)(-1)$$

$$= 0$$

6. Se A, B, C sono delle matrici quadrate di ordine n, dimostrare che:

$$|P| = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

Dalle prime n righe di $|P|$ si può ricavare soltanto un minore quadrato, di ordine n, che sia differente da zero: $|A|$. Il suo complemento algebrico è $|B|$. Quindi, con lo sviluppo di Laplace: $|P| = |A| \cdot |B|$.

7. Dimostrare che è: $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Supponiamo che $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ siano matrici quadrate di ordine n. Sia una matrice $C = [c_{ij}] = AB$, in modo che $c_{ij} = \sum_1^n a_{ik}b_{kj}$. Dal Problema 6 allora:

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$$

Si aggiunga, alla $(n+1)$-ma, la prima colonna di $|P|$ moltiplicata b_{11}, la seconda colonna moltiplicata b_{21}, la n-ma moltiplicata b_{n1} avremo

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Aggiungiamo poi alla $(n+2)$-ma colonna di $|P|$ b_{12} volte la prima, b_{22} volte la seconda, ..., b_{n2} volte la n-ma. Avremo:

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Continuando il procedimento si ottiene infine $|P| = \begin{vmatrix} A & C \\ -I_n & 0 \end{vmatrix}$. Dalle ultime n righe di $|P|$ si può formare solo un minore quadrato di ordine n che sia diverso da zero: $|-I_n| = (-1)^n$. Suo complemento algebrico è $(-1)^{1+2+\cdots+n+(n+1)+\cdots+2n}|C| = (-1)^{n(2n+1)}|C|$. Quindi, $|P| = (-1)^n(-1)^{n(2n+1)}|C| = |C|$ e $|C| = |AB| = |A|\cdot|B|$.

8. Sia $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ in cui $a_{ij} = a_{ij}(x)$, $(i, j = 1, 2, 3)$ sono delle funzioni di x differenziabili. Allora sarà:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

e, indicando la $\frac{d}{dx}a_{ij}$ con a'_{ij}, avremo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}|A| = {} & a'_{11}a_{22}a_{33} + a'_{22}a_{11}a_{33} + a'_{33}a_{11}a_{22} + a'_{12}a_{23}a_{31} + a'_{23}a_{12}a_{31} + a'_{31}a_{12}a_{23} \\ & + a'_{13}a_{32}a_{21} + a'_{32}a_{13}a_{21} + a'_{21}a_{13}a_{32} - a'_{11}a_{23}a_{32} - a'_{23}a_{11}a_{32} - a'_{32}a_{11}a_{23} \\ & - a'_{12}a_{21}a_{33} - a'_{21}a_{12}a_{33} - a'_{33}a_{12}a_{21} - a'_{13}a_{22}a_{31} - a'_{22}a_{13}a_{31} - a'_{31}a_{13}a_{22} \\ = {} & a'_{11}\alpha_{11} + a'_{12}\alpha_{12} + a'_{13}\alpha_{13} + a'_{21}\alpha_{21} + a'_{22}\alpha_{22} + a'_{23}\alpha_{23} + a'_{31}\alpha_{31} + a'_{32}\alpha_{32} + a'_{33}\alpha_{33} \\ = {} & \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

come conseguenza del Problema 10, cap. 3.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

9. Si valuti:

(*a*) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 156$ (*c*) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -304$

(*b*) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 41$ (*d*) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 118$

10. Essendo A quadrata di ordine n, dimostrare che $|\bar{A}'A|$ è reale e non negativo.

11. Valutare il determinante del Problema 9(*a*) usando minori delle prime due righe; e ancora usando minori delle prime due colonne.

12. (*a*) Siano $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix}$.

Usare l'espressione di $|AB| = |A|\cdot|B|$ per dimostrare che è:

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) = (a_1b_1-a_2b_2)^2 + (a_2b_1+a_1b_2)^2.$$

(*b*) Siano $A = \begin{bmatrix} a_1+ia_3 & a_2+ia_4 \\ -a_2+ia_4 & a_1-ia_3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1+ib_3 & b_2+ib_4 \\ -b_2+ib_4 & b_1-ib_3 \end{bmatrix}$.

Usando ancora l'espressione di $|AB| = |A|\cdot|B|$ si esprima $(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)$ come somma di quattro quadrati.

13. Valutare $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ usando minori delle prime tre righe. *Risp.* -720.

14. Valutare $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ usando minori delle prime due colonne. *Risp.* 2

15. Se le $A_1, A_2, \ldots, A_s$ sono matrici quadrate, si usi lo sviluppo di Laplace per dimostrare che è:

$$|\operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_s|$$

16. Sviluppare $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$ usando minori delle prime due righe, e dimostrare:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

17. Usare lo sviluppo di Laplace pèr dimostrare che il determinante quadrato di ordine n $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix}$, nel quale 0 sia quadrato di ordine k, è zero se è $k > \frac{1}{2}n$.

18. Nel determinante $|A| = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13} + a_{14}\alpha_{14}$ si sviluppi ogni cofattore $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$ lungo la prima colonna dimostrando:

$$|A| = a_{11}\alpha_{11} - \sum_{i=2}^{4} \sum_{j=2}^{4} a_{i1} a_{1j} \alpha_{1j}^{i1}$$

in cui α_{1j}^{i1} è complemento algebrico del minore $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$ di $|A|$.

19. Se α_{ij} indica il cofattore di a_{ij} nella matrice quadrata di ordine n $A = [a_{ij}]$, dimostrare per il determinante orlato:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & p_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & p_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ p_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j \alpha_{ij}$$

Traccia: Si usi la (4.3).

20. Si trovi la derivata di ciascuno dei determinanti $|A|$.

(a) $\begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x+1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x^2 & 2x+1 & x^3 \\ 0 & 3x-2 & x^2+1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} x^2-1 & x-1 & 1 \\ x^4 & x^8 & 2x+5 \\ x+1 & x^2 & x \end{vmatrix}$

Risp. (a) $2x + 9x^2 - 8x^3$, (b) $1 - 6x + 21x^2 + 12x^3 - 15x^4$, (c) $6x^5 - 5x^4 - 28x^3 + 9x^2 + 20x - 2$

21. Dimostrare: Se A e B sono matrici quadrate reali di ordine n, e la A è non singolare, se la $H = A + iB$ è Hermitiana, allora vale la:

$$|H|^2 = |A|^2 \cdot |I + (A^{-1}B)^2|$$

CAPITOLO 5

Equivalenza

RANGO DI UNA MATRICE. Si dice che una matrice A non nulla è di rango r se almeno uno dei suoi minori quadrati di ordine r è diverso da zero, mentre è nullo ogni suo minore quadrato di ordine $(r+1)$, se ve ne sono. Una matrice nulla è detta di rango 0.

Esempio 1. Il rango di $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ è $r = 2$, dal momento che $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, mentre $|A| = 0$.

Vedere Problema 1.

Una matrice A quadrata di ordine n si dice non singolare se il suo rango è $r = n$, che è come dire $|A| \neq 0$. Altrimenti A viene detta singolare, come quella dell'Esempio 1.

Da $|AB| = |A| \cdot |B|$ segue:

I. Il prodotto di due o più matrici quadrate non singolari di ordine n è non singolare; detto prodotto sarà singolare se lo è almeno una delle matrici.

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI. Le seguenti operazioni, dette trasformazioni elementari, non cambiano l'ordine né il rango di una matrice:

(1) Scambio della i-ma con la j-ma riga, indicato con H_{ij};
Scambio della i-ma con la j-ma colonna, indicato con K_{ij}.

(2) Moltiplicazione di ogni elemento della i-ma riga per uno scalare k diverso da zero, indicata con $H_i(k)$;
Moltiplicazione di ogni elemento della i-ma colonna per uno scalare k diverso da zero, indicata con $K_i(k)$.

(3) Addizione agli elementi della i-ma riga di k volte (per k scalare) i corrispondenti elementi della riga j-ma; questa operazione si indica con $H_{ij}(k)$;
Addizione agli elementi della i-ma colonna di k volte (con k scalare) i corrispondenti elementi della colonna j-ma: operazione che si indica con $K_{ij}(k)$.

Le trasformazioni H si dicono trasformazioni elementari di riga; le K, trasformazioni elementari di colonna.

Le trasformazioni elementari non richiedono elaborazione, essendo le stesse che vengono effettuate sulle righe (o colonne) di un determinante. E' evidente che esse non possono alterare l'ordine di una matrice. Nel Problema 2 si dimostra che non ne alterano il rango.

INVERSA DI UNA TRASFORMAZIONE ELEMENTARE. L'inversa di una trasformazione elementare consiste in una operazione che annulla l'effetto della trasformazione stessa; ovvero, dopo che A è stata oggetto di una delle trasformazioni elementari e dopo che la matrice risultante ha subito l'inversa di detta trasformazione, il risultato finale è ancora la matrice A.

Esempio 2. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Con la trasformazione elementare di riga $H_{21}(-2)$ otteniamo $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Con la trasformazione elementare di riga $H_{21}(+2)$ applicata alla B, otteniamo di nuovo A. Allora $H_{21}(-2)$ e $H_{21}(+2)$ sono trasformazioni elementari di riga inverse.

Le trasformazioni elementari inverse sono:

(1') $\quad H_{ij}^{-1} = H_{ij} \qquad K_{ij}^{-1} = K_{ij}$

(2') $\quad H_i^{-1}(k) = H_i(1/k) \qquad K_i^{-1}(k) = K_i(1/k)$

(3') $\quad H_{ij}^{-1}(k) = H_{ij}(-k) \qquad K_{ij}^{-1}(k) = K_{ij}(-k)$

Abbiamo che:

II. L'inversa di una trasformazione elementare è una trasformazione elementare dello stesso tipo.

MATRICI EQUIVALENTI. Due matrici A e B si dicono equivalenti, $A \sim B$, se possono essere ottenute una dall'altra con una successione di operazioni elementari.

Matrici equivalenti hanno lo stesso ordine e lo stesso rango.

Esempio 3. Applicando a turno le trasformazioni elementari $H_{21}(-2)$, $H_{31}(1)$, $H_{32}(-1)$, si ha:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Poiché tutti i minori quadrati di ordine 3 estratti da B sono zero, mentre $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$, il rango di B è 2; ed anche il rango di A sarà 2. Il procedimento di ottenere da A una matrice equivalente B il cui rango sia evidente per verifica va paragonato a quello per calcolare i vari minori di A.

Vedere il Problema 3.

EQUIVALENZA PER RIGHE. Se una matrice A viene ridotta a B usando soltanto trasformazioni elementari di riga, si dice che B è equivalente per righe ad A, e viceversa. Le A e B dell'esempio 3 sono matrici equivalenti per righe.

Ogni matrice A di rango r non nulla è equivalente per righe ad una matrice canonica C in cui:

(a) uno o più elementi di ciascuna delle prime r righe sono non nulli, mentre tutte le altre righe hanno solo elementi nulli;

(b) nella riga i-ma, $(i = 1, 2, \ldots, r)$, il primo elemento non nullo è 1; la colonna in cui si trova questo elemento si indichi con j_i ;

(c) $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$;

(d) l'unico elemento non nullo nella colonna j_i, $(i = 1, 2, \ldots, r)$, è l'elemento 1 della i-ma riga.

Per ridurre A alla C si supponga che j_1 sia l'indice della prima colonna non nulla di A.

(i_1) Se $a_{1j_1} \neq 0$, usare la $H_1(1/a_{1j_1})$ per ridurla ad 1 ove necessario.

(i_2) Se $a_{ij_1} = 0$ ma $a_{pj_1} \neq 0$, si usi la H_{1p} e si proceda come in (i_1).

(ii) Usare trasformazioni di riga del tipo (3) con multipli appropriati della prima riga per azzerare altri elementi della j_1-ma colonna.

Se elementi non nulli della matrice risultante B si trovano solo nella prima riga, è $B = C$. Altrimenti, supponiamo che sia j_2 l'indice della prima colonna in cui ciò non si verifica. Se $b_{2j_2} \neq 0$, usiamo la $H_2(1/b_{2j_2})$ come in (i_1); se $b_{2j_2} = 0$, ma $b_{qj_2} \neq 0$, usare la H_{2q} e continuare come in (i_1). E allora, come in (ii), liberare la j_2-ma colonna di tutti gli altri elementi non nulli.

Se gli elementi non nulli della matrice risultante capitano solo nelle prime due righe, abbiamo la C. Altrimenti si ripete il procedimento fino ad ottenere C.

Esempio 4. La sequenza di trasformazioni di riga $H_{21}(-2)$, $H_{31}(1)$; $H_2(1/5)$; $H_{12}(1)$, $H_{32}(-5)$ applicata alla A dell' Esempio 3 ci porta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 17/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= C$$

che ha le proprietà (a)-(d).

Vedere il Problema 4.

FORMA NORMALE DI UNA MATRICE. Ogni matrice A di rango $r > 0$ può essere ridotta per mezzo di trasformazioni elementari ad una delle forme

(5.1) $$I_r, \quad \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [I_r \;\; 0], \quad \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

che viene chiamata sua forma normale. Una matrice nulla coincide con la propria forma normale.

Dal momento che qui si possono usare trasformazioni sia di riga che di colonna, l'elemento 1 della prima riga ottenuta nel paragrafo precedente si può spostare nella prima colonna. In tal modo sia la prima riga che la prima colonna possono essere liberate da altri elementi non nulli. Similmente l'elemento 1 della seconda riga potrà essere spostato nella seconda colonna, e così via.

Per esempio, la sequenza $H_{21}(-2)$, $H_{31}(1)$, $K_{21}(-2)$, $K_{31}(1)$, $K_{41}(-4)$, K_{23}, $K_2(1/5)$, $H_{32}(-1)$, $K_{42}(3)$, applicata alla A dell'Esempio 3 ci dà $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, cioè la forma normale.

Vedere Problema 5.

MATRICI ELEMENTARI. La matrice che si ottiene applicando una trasformazione elementare di riga (o di colonna) alla matrice identica I_n si chiama matrice elementare riga (o colonna). Noi indicheremo una matrice elementare con il simbolo che rappresenta la trasformazione elementare che l'ha prodotta.

Esempio 5. Matrici elementari che si ottengono dalla $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sono:

$$H_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = K_{12}, \qquad H_3(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = K_3(k), \qquad H_{23}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = K_{32}(k)$$

Ogni matrice elementare è non singolare. (Perché?)

Moltiplicando A (di ordine $m \times n$) per una matrice elementare, si può ottenere lo stesso risultato dell'applicazione su A di una trasformazione elementare.

Per ottenere una data trasformazione elementare di riga di una matrice A di ordine $m \times n$, si applichi la trasformazione alla I_m formando la corrispondente matrice elementare H; moltiplicare a sinistra poi A per H.

Per ottenere invece una trasformazione elementare di colonna sulla stessa A, applicare detta trasformazione alla I_n per avere la corrispondente matrice elementare K, moltiplicando a destra poi A per K.

Esempio 6. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, la $H_{13} \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

scambia la prima con la terza riga di A; $AK_{13}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 16 & 5 & 6 \\ 25 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ aggiunge alla prima colonna della stessa A il doppio della terza colonna.

SIANO DATE DUE MATRICI A E B EQUIVALENTI. Indichiamo le matrici riga elementari e le matrici colonna elementari, corrispondenti alle trasformazioni elementari di riga e di colonna che riducono A a B, con $H_1, H_2, \ldots, H_s$; $K_1, K_2, \ldots, K_t$, in cui H_1 è la prima trasformazione di riga, H_2 la seconda e così via; K_1 è la prima trasformazione di colonna, K_2 la seconda, ecc. Allora sarà:

$$H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \ldots K_t = PAQ = B \tag{5.2}$$

in cui

$$P = H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \quad \text{e} \quad Q = K_1 \cdot K_2 \ldots K_t \tag{5.3}$$

Abbiamo così:

III. Due matrici A e B sono equivalenti solo ed esclusivamente se esistono le matrici non singolari P e Q definite nella **(5.3)**, tali che $PAQ = B$.

Esempio 7. Quando $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $H_{31}(-1) \cdot H_{21}(-2) \cdot A \cdot K_{21}(-2) \cdot K_{31}(1) \cdot K_{41}(-2) \cdot K_{42}(1) \cdot K_3(\frac{1}{2})$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B$$

E poiché ogni matrice è equivalente alla sua forma normale, abbiamo:

IV. Se A è una matrice quadrata non singolare di ordine n, esistono le matrici non singolari P e Q definite nella **(5.3)**, tali che $PAQ = I_n$.

Vedere Problema 6.

INVERSO DEL PRODOTTO DI MATRICI ELEMENTARI. Siano

$$P = H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \quad \text{e} \quad Q = K_1 \cdot K_2 \ldots K_t$$

come nella **(5.3)**. Poiché ogni matrice H e ogni K hanno la loro inversa, e dato che l'inversa di un prodotto è il prodotto – in ordine contrario – fra le inverse delle matrici-fattori:

$$P^{-1} = H_1^{-1} \cdot H_2^{-1} \ldots H_s^{-1} \quad \text{e} \quad Q^{-1} = K_t^{-1} \ldots K_2^{-1} \cdot K_1^{-1} \tag{5.4}$$

Sia A una matrice quadrata non singolare di ordine n, e le P, Q già definite siano tali che $PAQ = I_n$. Sarà allora:

$$A = P^{-1}(PAQ)Q^{-1} = P^{-1} \cdot I_n \cdot Q^{-1} = P^{-1} \cdot Q^{-1} \tag{5.5}$$

E abbiamo verificato che:

V. Ogni matrice non singolare si può rappresentare come prodotto di matrici elementari.

Vedere il Problema 7.

Da questo seguono i teoremi:

VI. Se A è non singolare, il rango di AB (e anche di BA) è quello di B.

VII. Se P e Q sono non singolari, il rango di PAQ è quello di A.

INSIEMI CANONICI SOTTO EQUIVALENZA. Nel Problema 8 si dimostra:

VIII. Due matrici A e B di ordine $m \times n$ sono equivalenti solo ed esclusivamente se esse hanno lo stesso rango.

Un insieme di matrici $m \times n$ è detto canonico sotto equivalenza se ogni sua matrice è equivalente ad una e una sola matrice compresa nell'insieme stesso. Un simile insieme canonico è dato dalla **(5.1)** quando riassume i valori $1, 2, \ldots, m$, o $1, 2, \ldots, n$, secondo quale sia il minore.

Vedere Problema 9.

RANGO DI UN PRODOTTO. Sia A una matrice di ordine $m \times p$, di rango r. Per il Teorema **III** esistono matrici non singolari P e Q tali che:

$$PAQ = N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E allora $A = P^{-1}NQ^{-1}$. Sia B una matrice $p \times n$; consideriamo ora il rango di:

$$AB = P^{-1}NQ^{-1}B \tag{5.6}$$

Per il Teorema **VI** il rango di AB è quello di $NQ^{-1}B$. Ora, le righe di $NQ^{-1}B$ consistono delle prime righe di $Q^{-1}B$ e di $m-r$ righe di zeri. Perciò il rango di AB non può essere più alto di r, che è il rango di A. Similmente il rango di AB non può superare quello di B. Abbiamo così dimostrato:

IX. Il rango del prodotto di due matrici non può essere più alto del rango di uno dei due fattori.

Poniamo $AB = 0$; allora, dalla **(5.6)** sarà $NQ^{-1}B = 0$. Questo rende però necessario che le prime r righe di $Q^{-1}B$ siano degli zeri, mentre le rimanenti sono arbitrarie. Allora il rango della $Q^{-1}B$, e per conseguenza quello della B, non può essere maggiore di $p-r$. Si è così dimostrato:

X. Se la matrice A di ordine $m \times p$ è di rango r, e la matrice B di ordine $p \times n$ è tale che $AB = 0$, il rango della B non può essere maggiore di $p-r$.

PROBLEMI RISOLTI

1. (*a*) Il rango di $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ è 2, poiché $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, e non vi sono minori del 3° ordine.

   (*b*) Il rango di $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ è 2 essendo $|A| = 0$ e $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$.

   (*c*) Il rango di $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ è 1, poiché $|A| = 0$, mentre ciascuno dei 9 minori quadrati di ordine 2 vale 0, pur non essendo zero ogni elemento.

2. Dimostrare che le trasformazioni elementari non alterano il rango di una matrice.

   Considereremo qui soltanto trasformazioni di riga, lasciando come esercizio lo studio di quelle di colonna. Il rango della matrice A di ordine $m \times n$ sia r, tale che ogni minore di A, quadrato di ordine $(r+1)$, sempre che ve ne siano, sia nullo. B sia la matrice che si ottiene da A con una trasformazione di riga. Indichiamo con $|R|$ ogni minore di A, quadrato di ordine $(r+1)$, e con $|S|$ quello di B, quadrato di ordine $(r+1)$, avente la stessa posizione di $|R|$.

   La trasformazione di riga sia H_{ij}. Il suo effetto su $|R|$ è: (i) lasciarlo inalterato, oppure: (ii) scambiarne due delle righe, ovvero: (iii) scambiare una delle sue righe con una che non è di $|R|$. Nel caso (i) $|S| = |R| = 0$; in (ii), $|S| = -|R| = 0$; nel (iii), $|S|$ è, a parte eventualmente il segno, un altro minore quadrato di ordine $(r+1)$ di $|A|$, cioè nullo.

   La trasformazione di riga sia ora $H_i(k)$. Il suo effetto su $|R|$ può essere: (i) lasciarlo immutato, oppure: (ii) moltiplicarne una riga per k. Allora sarà, rispettivamente: $|S| = |R| = 0$ oppure $|S| = k|R| = 0$.

   Sia infine una trasformazione di riga $H_{ij}(k)$. Suo effetto su $|R|$ sarà: (i) lasciarlo inalterato, (ii) aggiungere ad una delle righe un'altra riga, moltiplicata per k, oppure: (iii) aggiungere ad una delle righe un'altra riga, non appartenente a $|R|$, moltiplicata per k. Nei casi (i) e (ii), $|S| = |R| = 0$; nel caso (iii), $|S| = |R| \pm k$ (per un altro quadrato di A, di ordine $(r+1)$) $= 0 \pm k \cdot 0 = 0$.

   Si è visto così che una trasformazione elementare di riga non può aumentare il rango di una matrice. D'altra parte non può neanche diminuirlo perché, se così fosse, la trasformazione inversa lo dovrebbe aumentare. Perciò una trasformazione elementare di riga non altera il rango di una matrice.

3. Per ogni matrice A si ottenga una matrice B equivalente e da questa, per verifica, si determini il rango di A.

   $$(a)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

   Le trasformazioni usate erano $H_{21}(-2)$, $H_{31}(-3)$; $H_2(-1/3)$, $H_3(-1/4)$; $H_{32}(-1)$. Il rango è 3.

   $$(b)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$ Il rango è 3.

   $$(c)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1+2i \\ 1 & 1+2i & 1+i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1+2i \\ 1 & i & 1+2i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1+2i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$ Il rango è 2.

   Nota. Le matrici equivalenti B che si sono ottenute qui non sono uniche. In particolare, dal momento che in (*a*) e (*b*) si sono usate solo trasformazioni di riga, il lettore può ottenere altre matrici equivalenti usando solo trasformazioni di colonna. Quando gli elementi sono numeri razionali, non c'è in genere convenienza nel combinare trasformazioni di riga e di colonna.

4. Ricavare la matrice canonica C equivalente per righe ad ogni matrice A data.

   $$(a)\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

   $$(b)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = C$$

5. Ridurre a forma normale le seguenti matrici:

   $$(a)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   $$= [I_3 \;\; 0]$$

   Le trasformazioni elementari usate sono:

   $H_{21}(-3)$, $H_{31}(2)$; $K_{21}(-2)$, $K_{41}(1)$; K_{23}; $H_{32}(-2)$; $K_{32}(2)$, $K_{42}(-5)$; $K_3(1/11)$, $K_{43}(7)$

   $$(b)\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Le trasformazioni elementari sono:

   H_{12}; $K_1(\frac{1}{2})$; $H_{31}(-2)$; $K_{21}(-3)$, $K_{31}(-5)$, $K_{41}(-4)$; $K_2(\frac{1}{2})$; $K_{32}(-3)$, $K_{42}(-4)$; $H_{32}(-1)$

6. Ridurre la $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ a forma normale N, calcolando delle matrici P_1 e Q_1 tali che $P_1 A Q_1 = N$.

   Poiché la A è di ordine 3×4, opereremo sulla disposizione $\begin{matrix} I_4 & \\ A & I_3 \end{matrix}$ Ogni trasformazione di riga è applicata ad una riga di sette elementi; ugualmente ogni trasformazione di colonna si applica ad una colonna di sette elementi.

$$\begin{array}{rrrrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrrrr} 1 & -2 & -3 & 2 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrrrr} 1 & -2 & -3 & 2 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{rrrrrrr} 1 & 1/3 & -3 & 2 & & & \\ 0 & -1/6 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrrrr} 1 & 1/3 & -4/3 & -1/3 & & & \\ 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{cc} Q_1 & \\ N & P_1 \end{array}$$

Avremo così: $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $P_1AQ_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = N$.

7. Esprimere $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ in forma di prodotto di matrici elementari.

Le trasformazioni elementari $H_{21}(-1), H_{31}(-1); K_{21}(-3), K_{31}(-3)$ riducono A a I_3, ovvero [si veda la (5.2)]:

$$I = H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 = H_{31}(-1) \cdot H_{21}(-1) \cdot A \cdot K_{21}(-3) \cdot K_{31}(-3)$$

Dalla (5.5) abbiamo:

$$A = H_1^{-1} \cdot H_2^{-1} \cdot K_2^{-1} \cdot K_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Dimostrare che due matrici A e B sono equivalenti solo ed esclusivamente nel caso in cui abbiano lo stesso rango.

Se hanno lo stesso rango, sono entrambe equivalenti alla stessa matrice (5.1), e lo sono reciprocamente. Con ragionamento inverso, se A e B sono equivalenti, esistono matrici non singolari P e Q tali che $B = PAQ$. E così, per il Teorema **VII**, A e B hanno lo stesso rango.

9. Insieme canonico per matrici non nulle di ordine tre:

$$I_3, \quad \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Insieme canonico per matrici non nulle di ordine 3×4:

$$[I_3 \; 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Estraendo da una matrice quadrata A di ordine n e rango r_A una sottomatrice B che consista di s righe (o colonne) della A stessa, il rango r_B della B è maggiore o uguale a $r_A + s - n$.

La forma normale di A ha $n - r_A$ righe i cui elementi sono degli zeri; la forma normale di B ha $s - r_B$ righe ugualmente costituite da zeri. Evidentemente:

$$n - r_A \geq s - r_B$$

da cui segue che $r_B \geq r_A + s - n$, come volevamo dimostrare.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

11. Trovare il rango di: (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{bmatrix}$.

Risp. (a) 2, (b) 3, (c) 4, (d) 2

12. Dimostrare, usandone i minori, che $A, A', \bar{A}$, e $\bar{A}'$ sono dello stesso rango.

13. Si dimostri che la matrice canonica C, equivalente per righe a una data matrice A, è univocamente determinata dalla A.

14. Trovare la matrice canonica equivalente per righe ad ognuna delle seguenti:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

15. Scrivere la forma normale di ciascuna delle matrici del Problema 14.

Risp. (a) $[I_2 \; 0]$, (b), (c) $[I_3 \; 0]$ (d) $\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

16. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Dalla I_3 ricavare $H_{12}, H_2(3), H_{13}(-4)$ e controllare che ogni HA effettui la corrispondente trasformazione di riga.
(b) Dalla I_4 ricavare $K_{24}, K_3(-1), K_{42}(3)$ e dimostrare che ogni AK effettua la corrispondente trasformazione di colonna.
(c) Scrivere le inverse $H_{12}^{-1}, H_2^{-1}(3), H_{13}^{-1}(-4)$ delle matrici elementari del punto (a). Controllare che per ogni H sia $H, H \cdot H^{-1} = I$.
(d) Scrivere le inverse $K_{24}^{-1}, K_3^{-1}(-1), K_{42}^{-1}(3)$ delle matrici elementari del punto (b). Controllare che per ogni K sia $KK^{-1} = I$.
(e) Calcolare $B = H_{12} \cdot H_2(3) \cdot H_{13}(-4) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = H_{13}^{-1}(-4) \cdot H_2^{-1}(3) \cdot H_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
(f) Dimostrare che $BC = CB = I$.

17. (a) Si dimostri che $K'_{ij} = H_{ij}$, $K'_i(k) = H_i(k)$, e $K'_{ij}(k) = H_{ij}(k)$.
(b) Si dimostri che se R è un prodotto di matrici elementari di colonna, R' è il prodotto, in ordine inverso, delle stesse matrici elementari di riga.

18. Dimostrare: (a) AB e BA sono non singolari se A e B sono matrici quadrate di ordine n non singolari.
(b) AB e BA sono singolari se è singolare almeno una delle matrici quadrate di ordine n, A e B.

19. Se P e Q sono non singolari, dimostrare che A, PA, AQ nonché PAQ hanno lo stesso rango.

Traccia: Esprimere P e Q come prodotti di matrici elementari.

20. Ridurre la $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ alla forma normale N e calcolare le matrici P_2 e Q_2 tali che $P_2BQ_2 = N$.

21. (*a*) Dimostrare che in un insieme canonico sotto equivalenza di matrici quadrate di ordine n, il numero di matrici è $n+1$.
(*b*) Dimostrare che in un insieme canonico sotto equivalenza di matrici di ordine $m \times n$, il numero delle matrici è il più piccolo fra $m+1$ e $n+1$.

22. Data una $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$ di rango 2, trovare una matrice quadrata di ordine 4 $B \neq 0$ tale che $AB = 0$.
Traccia: Seguire la dimostrazione del Teorema X e assumere:
$$Q^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$$
in cui $a, b, \ldots, h$ sono arbitrari.

23. La matrice A del Problema 6 e la matrice B del 20 sono equivalenti. Trovare una P e una Q tali che $B = PAQ$.

24. Se le matrici di ordine $m \times n$ A e B sono rispettivamente di rango r_A e r_B, dimostrare che il rango di $A+B$ non può essere maggiore di $r_A + r_B$.

25. Sia A una matrice quadrata di ordine n arbitraria, e B una matrice elementare, sempre quadrata di ordine n. Considerando ognuno dei sei diversi tipi di matrice B, dimostrare che $|AB| = |A| \cdot |B|$.

26. Siano A e B delle matrici quadrate di ordine n. (*a*) Se almeno una è singolare, si dimostri che è $|AB| = |A| \cdot |B|$; (*b*) se entrambe sono non singolari, si dimostri tramite la (5.5) e il Problema 25 che vale la $|AB| = |A| \cdot |B|$.

27. Dimostrare che l'equivalenza fra matrici è una relazione di equivalenza.

28. Dimostrare che la forma canonica equivalente per righe di una matrice A non singolare è I, e viceversa.

29. Dimostrare che non tutte le matrici A possono essere ridotte a forma normale con sole trasformazioni di riga.
Traccia: Mostrare una matrice che non possa subire detta riduzione.

30. Mostrare come si applica la trasformazione H_{ij} ad una qualsiasi matrice A usando una sequenza di trasformazioni di riga del tipo (2) e (3).

31. Dimostrare che se A è una matrice di ordine $m \times n$ di rango m, $(m \leq n)$, la AA' è una matrice non singolare simmetrica. Enunciare il teorema nel caso in cui il rango di A sia $< m$.

CAPITOLO 6

Aggiunta di una matrice quadrata

AGGIUNTA. Sia $A = [a_{ij}]$ una matrice quadrata di ordine n, e α_{ij} il cofattore di a_{ij}; allora, per definizione:

$$\text{(6.1)} \qquad \text{aggiunta di } A = \text{agg } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Si noti bene che i cofattori degli elementi della i-ma riga (o colonna) di A sono gli elementi della i-ma colonna (o riga) di agg A.

Esempio 1. Per la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$:

$\alpha_{11} = 6,\ \alpha_{12} = -2,\ \alpha_{13} = -3,\ \alpha_{21} = 1,\ \alpha_{22} = -5,\ \alpha_{23} = 3,\ \alpha_{31} = -5,\ \alpha_{32} = 4,\ \alpha_{33} = -1$

e $$\text{agg } A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Vedere Problemi 1-2

Usando i Teoremi X e XI del cap. 3, si può trovare:

$$\text{(6.2)} \qquad A(\text{agg}A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \text{diag}(|A|, |A|, \ldots, |A|) = |A| \cdot I_n = (\text{agg}A)A$$

Esempio 2. Per la matrice A dell'Esempio 1, $|A| = -7$, e:

$$A(\text{agg}A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = -7I$$

Prendendo i determinanti della (6.2), abbiamo:

$$\text{(6.3)} \qquad |A| \cdot |\text{agg } A| = |A|^n = |\text{agg } A| \cdot |A|$$

Ne segue:

I. Se A è quadrata di ordine n e non singolare:

$$\text{(6.4)} \qquad |\text{agg } A| = |A|^{n-1}$$

II. Se A è quadrata di ordine n e singolare:

$$A(\text{agg}A) = (\text{agg}A)A = 0$$

Se A è di rango $< n-1$, agg $A = 0$. Se A è di rango $n-1$, agg A è di rango 1.

Vedere il Problema 3.

AGGIUNTA DI UN PRODOTTO. Nel problema 4 si dimostra:

III. Se A e B sono matrici quadrate di ordine n:

$$\text{agg}\, AB = \text{agg}\, B \cdot \text{agg}\, A \tag{6.5}$$

MINORE DI UN'AGGIUNTA. Nel Problema 6 dimostriamo:

IV. Sia $\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ un minore quadrato di ordine m della matrice quadrata di ordine n: $A = [a_{ij}]$;

sia $\left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right|$ il suo complemento nella A;

sia $\left|M^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ il minore quadrato di ordine m di agg A, i cui elementi occupino nello stesso agg A la medesima posizione che gli elementi di $\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ occupano in A.

Avremo allora:

$$|A| \cdot \left|M^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right| = (-1)^s |A|^m \cdot \left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right| \tag{6.6}$$

in cui $s = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m$.

Se nella **(6.6)** A è non singolare:

$$\left|M^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right| = (-1)^s |A|^{m-1} \cdot \left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right| \tag{6.7}$$

Quando $m = 2$, la **(6.7)** diventa

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i_1, j_1} & \alpha_{i_2, j_1} \\ \alpha_{i_1, j_2} & \alpha_{i_2, j_2} \end{vmatrix} = (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} |A| \cdot \left|A^{j_3, j_4, \ldots, j_n}_{i_3, i_4, \ldots, i_n}\right| \tag{6.8}$$

$$= |A| \cdot \text{complemento algebrico di } \left|A^{j_1, j_2}_{i_1, i_2}\right|$$

Quando $m = n-1$, la **(6.7)** diventa:

$$\left|M^{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}}_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}\right| = (-1)^{i_n + j_n} |A|^{n-2} a_{i_n, j_n} \tag{6.9}$$

Quando infine $m = n$, la **(6.7)** diventa **(6.4)**.

PROBLEMI RISOLTI

1. L'aggiunta di $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ è $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

2. L'aggiunta di $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ è

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Dimostriamo che se A è di ordine n e rango $n-1$, agg A è di rango 1.

Notiamo primariamente che, dal momento che A è di rango $n-1$, esiste almeno un cofattore diverso da zero, e il rango di agg A è almeno uno. Per il Teorema X del cap. 5, il rango di agg A è al più $n-(n-1) = 1$. Quindi, il rango è proprio uno.

4. Dimostriamo: agg AB = agg B · agg A.

Per la **(6.2)**: $AB \cdot \text{agg}AB = |AB| \cdot I = (\text{agg}AB)AB$

E poiché: $AB \cdot \text{agg}B \cdot \text{agg}A = A(B \cdot \text{agg}B)\text{agg}A = A(|B| \cdot I)\text{agg}A = |B|(A\, \text{agg}A) = |B| \cdot |A| \cdot I = |AB| \cdot I$,

e: $(\text{agg}B \cdot \text{agg}A)AB = \text{agg}B\{(\text{agg}A)A\}B = \text{agg}B \cdot |A| \cdot I \cdot B = |A|\{(\text{agg}B)B\} = |AB| \cdot I$,

concludiamo che: $\text{agg}\, AB = \text{agg}\, B \cdot \text{agg}\, A$

5. Dimostrare che: $\text{agg}(\text{agg}\, A) = |A|^{n-2} \cdot A$, se $|A| \neq 0$.

Per le **(6.2)** e **(6.4)**:

$$\begin{aligned} \text{agg}\, A \cdot \text{agg}(\text{agg}A) &= \text{diag}(|\text{agg}\, A|, |\text{agg}A|, \ldots, |\text{agg}\, A|) \\ &= \text{diag}(|A|^{n-1}, |A|^{n-1}, \ldots, |A|^{n-1}) \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} A \cdot \text{agg}\, A \cdot \text{agg}(\text{agg}A) &= |A|^{n-1} \cdot A \\ |A| \cdot \text{agg}(\text{agg}A) &= |A|^{n-1} \cdot A \\ \text{agg}(\text{agg}A) &= |A|^{n-2} \cdot A \end{aligned}$$

6. Dimostriamo: Sia $\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ un minore quadrato di ordine m della matrice quadrata $A = [a_{ij}]$, di ordine n;

sia $\left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right|$ il complemento del minore in A;

sia $\left|M^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ il minore quadrato di ordine m di agg A, i cui elementi occupano in agg A la stessa posizione che quelli di $\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ occupano in A. Allora:

$$|A| \cdot \left| M^{j_1,\, j_2,\, \ldots,\, j_m}_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_m} \right| \;=\; (-1)^s |A|^m \cdot \left| A^{j_{m+1},\, j_{m+2},\, \ldots,\, j_n}_{i_{m+1},\, i_{m+2},\, \ldots,\, i_n} \right|$$

in cui $s = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m$.

Dalla:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_m} & a_{i_1,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_1,j_n} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_m} & a_{i_2,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_2,j_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_m,j_1} & a_{i_m,j_2} & \cdots & a_{i_m,j_m} & a_{i_m,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_m,j_n} \\ \hline a_{i_{m+1},j_1} & a_{i_{m+1},j_2} & \cdots & a_{i_{m+1},j_m} & a_{i_{m+1},j_{m+1}} & \cdots & a_{i_{m+1},j_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_n,j_1} & a_{i_n,j_2} & \cdots & a_{i_n,j_m} & a_{i_n,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_n,j_n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|cccc} \alpha_{i_1,j_1} & \alpha_{i_2,j_1} & \cdots & \alpha_{i_m,j_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{i_1,j_2} & \alpha_{i_2,j_2} & \cdots & \alpha_{i_m,j_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i_1,j_m} & \alpha_{i_2,j_m} & \cdots & \alpha_{i_m,j_m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \alpha_{i_1,j_{m+1}} & \alpha_{i_2,j_{m+1}} & \cdots & \alpha_{i_m,j_{m+1}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i_1,j_n} & \alpha_{i_2,j_n} & \cdots & \alpha_{i_m,j_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|ccc} |A| & 0 & \cdots & 0 & a_{i_1,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_1,j_n} \\ 0 & |A| & \cdots & 0 & a_{i_2,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_2,j_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| & a_{i_m,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_m,j_n} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i_{m+1},j_{m+1}} & \cdots & a_{i_{m+1},j_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i_n,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_n,j_n} \end{array}\right]$$

prendendo i determinanti da ambo le parti, abbiamo:

$$(-1)^s |A| \cdot \left| M^{j_1,\, j_2,\, \ldots,\, j_m}_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_m} \right| \;=\; |A|^m \cdot \left| A^{j_{m+1},\, j_{m+2},\, \ldots,\, j_n}_{i_{m+1},\, i_{m+2},\, \ldots,\, i_n} \right|$$

in cui s è definito come nel teorema. Segue subito la forma cercata.

7. Dimostrare che se A è emisimmetrica di ordine $2n$, allora $|A|$ è il quadrato di un polinomio negli elementi di A.

$|A|$ è, per definizione, un polinomio nei propri elementi; dimostriamo adesso che nelle condizioni appena date questo polinomio è un quadrato perfetto.

Il teorema è vero per $n = 1$ poiché, se $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$, $|A| = a^2$.

Facciamo ora l'ipotesi che il teorema sia vero per $n = k$, e consideriamo la matrice emisimmetrica $A = [a_{ij}]$, di ordine $2k+2$. Per partizione possiamo scrivere: $A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$ in cui

$$E = \begin{bmatrix} 0 & a_{2k+1,\,2k+2} \\ a_{2k+2,\,2k+1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Allora B è emisimmetrica di ordine $2k$, e per ipotesi $|B| = f^2$, in cui f è un polinomio negli elementi di B.

Se α_{ij} indica il cofattore di a_{ij} in A, si avrà per il Problema 6 – cap. 3 – e per la (6.8):

$$\begin{vmatrix} \alpha_{2k+1,\,2k+1} & \alpha_{2k+2,\,2k+1} \\ \alpha_{2k+1,\,2k+2} & \alpha_{2k+2,\,2k+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{2k+2,\,2k+1} \\ \alpha_{2k+1,\,2k+2} & 0 \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

Inoltre è $\alpha_{2k+2,\,2k+1} = -\alpha_{2k+1,\,2k+2}$; per cui:

$$|A| \cdot f^2 = \alpha^2_{2k+1,\,2k+2} \quad \text{e} \quad |A| = \left\{ \frac{\alpha_{2k+1,\,2k+2}}{f} \right\}^2,$$

quadrato perfetto.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

8. Trovare l'aggiunta di:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Risp. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

9. Verificare:
   - (*a*) L'aggiunta di una matrice scalare è una matrice scalare.
   - (*b*) L'aggiunta di una matrice diagonale è una matrice diagonale.
   - (*c*) L'aggiunta di una matrice triangolare è una matrice triangolare.

10. Scrivere una matrice $A \neq 0$ di ordine 3, tale che agg $A = 0$.

11. Se A è una matrice quadrata di ordine 2, dimostrare che agg (agg A) $= A$.

12. Dimostrare che l'aggiunta di $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ è $3A'$, e l'aggiunta di $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ è A stessa.

13. Dimostrare che se una matrice quadrata A di ordine n è di rango $< n-1$, allora agg $A = 0$.

14. Verificare che se A è simmetrica, ugualmente lo è agg A.

15. Dimostrare: Se A è Hermitiana, lo è anche agg A.

16. Dimostrare: Se A è emisimmetrica di ordine n, agg A è simmetrica o emisimmetrica a seconda che n sia dispari o pari.

17. Esiste per le matrici anti-Hermitiane un teorema simile a quello del Problema 16?

18. Per le matrici elementari, dimostrare:

(*a*) agg $H_{ij}^{-1} = -H_{ij}$;

(*b*) agg $H_i^{-1}(k) = \text{diag}(1/k, 1/k, \ldots, 1/k, 1, 1/k, \ldots, 1/k)$, in cui l'elemento 1 si trova nella *i*-ma riga;

(*c*) agg $H_{ij}^{-1}(k) = H_{ij}(k)$; risultati simili si hanno per le *K*.

19. Dimostrare: Se A è una matrice quadrata di ordine n e rango n o $n-1$, e se $H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \ldots K_t = \lambda$, in cui λ è I_n o $\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, allora:

$$\text{agg}\,A = \text{agg}\,K_1^{-1} \cdot \text{agg}\,K_2^{-1} \ldots \text{agg}\,K_t^{-1} \cdot \text{agg}\,\lambda \cdot \text{agg}\,H_s^{-1} \ldots \text{agg}\,H_2^{-1} \cdot \text{agg}\,H_1^{-1}$$

20. Usando il metodo del Problema 19, calcolare l'aggiunta delle:

(*a*) A del Problema 7, cap. 5; (*b*) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

Risp. (*a*) $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (*b*) $\begin{bmatrix} -14 & 2 & -2 & 2 \\ 14 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

21. Siano $A = [a_{ij}]$ e $B = [k - a_{ij}]$ delle matrici quadrate di ordine 3. Se è $S(C)$ = somma degli elementi della matrice C, dimostrare:

$$S(\text{agg}A) = S(\text{agg}B) \quad \text{e} \quad |B| = k \cdot S(\text{agg}A) - |A|$$

22. Verificare che se A è quadrata di ordine n, allora $|\text{agg}\,(\text{agg}A)| = |A|^{(n-1)^2}$.

23. Sia $A_n = [a_{ij}]$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ la matrice triangolare bassa i cui elementi non nulli costituiscono il triangolo di Pascal; per esempio:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Si definisca $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$, e si verifichi, per $n = 2, 3, 4$, che:

(i) $$\text{agg}\,A_n = [b_{ij}] = A_n^{-1}$$

24. Si ottenga la B dalla A cancellandone *i*-me e *p*-me righe, nonché *j*-me e *q*-me colonne. Dimostrare che:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ij} & \alpha_{pj} \\ \alpha_{iq} & \alpha_{pq} \end{vmatrix} = (-1)^{i+p+j+q} |B| \cdot |A|$$

in cui α_{ij} è il cofattore di a_{ij} in $|A|$.

CAPITOLO 7

Inversa di una matrice

Se A e B sono due matrici quadrate di ordine n tali che $AB = BA = I$, B viene detta inversa di A, $(B = A^{-1})$, mentre A viene detta inversa di B $(A = B^{-1})$.

Nel Problema 1 si dimostra:

I. Una matrice quadrata A di ordine n possiede una inversa solo ed esclusivamente quando è non singolare.

L'inversa di una matrice quadrata di ordine n non singolare è unica. (Vedere Problema 7, cap. 2).

II. Se A non è singolare, $AB = AC$ implica $B = C$.

L'INVERSA di una matrice diagonale non singolare $\text{diag}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ è la matrice diagonale:

$$\text{diag}(1/k_1, 1/k_2, \ldots, 1/k_n)$$

Se $A_1, A_2, \ldots, A_s$ sono matrici non singolari, l'inversa della somma diretta $\text{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)$ sarà:

$$\text{diag}(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \ldots, A_s^{-1})$$

Si indicano di seguito dei procedimenti per calcolare l'inversa di una generica matrice non singolare.

INVERSA DALL'AGGIUNTA. Dalla (6.2): $A\,\text{adj}\,A = |A| \cdot I$. Se A è non singolare:

$$(7.1) \qquad A^{-1} = \frac{\text{agg}\,A}{|A|} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}/|A| & \alpha_{21}/|A| & \ldots & \alpha_{n1}/|A| \\ \alpha_{12}/|A| & \alpha_{22}/|A| & \ldots & \alpha_{n2}/|A| \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n}/|A| & \alpha_{2n}/|A| & \ldots & \alpha_{nn}/|A| \end{bmatrix}$$

Esempio 1. Dal Problema 2, cap. 6, l'aggiunta di $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ è $\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Poiché $|A| = -2$, $A^{-1} = \dfrac{\text{agg}\,A}{|A|} = \begin{bmatrix} 7/2 & -3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Vedere Problema 2.

INVERSA DA MATRICI ELEMENTARI. La matrice quadrata di ordine n – non singolare – A sia ridotta ad I con trasformazioni elementari, così che:

$$H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \ldots K_t = PAQ = I$$

Allora $A = P^{-1} \cdot Q^{-1}$ per la (5.5) e, poiché $(B^{-1})^{-1} = B$:

$$A^{-1} = (P^{-1} \cdot Q^{-1})^{-1} = Q \cdot P = K_1 \cdot K_2 \ldots K_t \cdot H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \qquad (7.2)$$

Esempio 2. Dal Problema 7, cap. 5:

$$H_2H_1AK_1K_2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = I$$

Quindi: $$A^{-1} = K_1K_2H_2H_1 = \begin{bmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}.$$

Nel cap. 5 si dimostrava che una matrice non singolare può essere ridotta a forma normale con sole trasformazioni di riga. Allora per la (7.2), con $Q = I$, avremo:

$$A^{-1} = P = H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \qquad (7.3)$$

Ovvero:

III. Se A viene ridotta ad I con una sequenza di sole trasformazioni di riga, A^{-1} è uguale al prodotto, in ordine inverso, delle corrispondenti matrici elementari.

Esempio 3. Trovare l'inversa di $A = \begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}$ dell'Esempio 2, usando solo trasformazioni di riga per ridurre A ad I.

Scriviamo la matrice $[A \; I_3]$ e compiamo sulle righe a sei elementi la sequenza di trasformazioni di riga che portano A ad I_3. Avremo:

$$[A \; I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\1&4&3&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&4&-3&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7&-3&-3\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$= [I_3 \; A^{-1}]$$

per la (7.3). In tal modo, così come A viene ridotta a I_3, I_3 viene trasformata in $A^{-1} = \begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$.

Vedere il Problema 3.

INVERSA PER PARTIZIONE. La matrice $A = [a_{ij}]$ di ordine n e la sua inversa $B = [b_{ij}]$ siano ripartite in sottomatrici degli ordini indicati:

$$\left[\begin{array}{c|c}A_{11} & A_{12}\\(p\times p) & (p\times q)\\\hline A_{21} & A_{22}\\(q\times p) & (q\times q)\end{array}\right] \quad e \quad \left[\begin{array}{c|c}B_{11} & B_{12}\\(p\times p) & (p\times q)\\\hline B_{21} & B_{22}\\(q\times p) & (q\times q)\end{array}\right], \text{ in cui } p+q=n$$

Poiché $AB = BA = I_n$, avremo

$$(7.4) \quad \begin{cases}\text{(i)} \; A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_p & \text{(iii)} \; B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0\\ \text{(ii)} \; A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 & \text{(iv)} \; B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I_q\end{cases}$$

Allora, nell'ipotesi che A_{11} sia non singolare:

$$(7.5) \quad \begin{cases}B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) & B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})\\ B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1} & B_{22} = \xi^{-1}\end{cases}$$

in cui $\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12})$.

Vedere Problema 4.

In pratica A_{11} viene presa solitamente di ordine $n-1$. Per avere A_{11}^{-1}, si usa il procedimento seguente. Siano:

$$G_2 = \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}, \quad G_3 = \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}, \quad G_4 = \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}, \quad \ldots$$

Calcolata G_2^{-1}, ripartiamo G_3 in modo che $A_{22} = [a_{33}]$, e usiamo la (7.5) per avere G_3^{-1}. Ripetiamo su G_4 dopo averla ripartita in modo che $A_{22} = [a_{44}]$, e così via.

Esempio 4. Trovare l'inversa di $A = \begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}$, usando la partizione.

Assumiamo $A_{11} = \begin{bmatrix}1&3\\1&4\end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$, $A_{21} = [1 \; 3]$, e $A_{22} = [4]$. Ora:

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix}4&-3\\-1&1\end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix}4&-3\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}, \quad A_{21}A_{11}^{-1} = [1 \; 3]\begin{bmatrix}4&-3\\-1&1\end{bmatrix} = [1 \; 0],$$

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}) = [4] - [1 \; 3]\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} = [1], \qquad \xi^{-1} = [1]$$

Allora avremo:

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix}4&-3\\-1&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}[1]\cdot[1 \; 0]$$

$$= \begin{bmatrix}4&-3\\-1&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7&-3\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1} = \begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}$$

$$B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = [-1, 0]$$

$$B_{22} = \xi^{-1} = [1]$$

e $$A^{-1} = \begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

Vedere i Problemi 5-6.

INVERSA DI UNA MATRICE SIMMETRICA. Quando A è simmetrica, $a_{ij} = a_{ji}$ e vanno computati solo $\frac{1}{2}n(n+1)$ cofattori invece dei soliti n^2 nell'ottenere A^{-1} da agg A.

Se vi è qualche vantaggio nel calcolare A^{-1} come prodotto di matrici elementari, le trasformazioni elementari debbono essere sviluppate in modo da lasciare inalterata la simmetria. Questo richiede che le trasformazioni si effettuino a coppie: una trasformazione di riga sarà subito seguita dalla trasformazione di colonna corrispondente. Per esempio:

$$H_{12}\begin{bmatrix} 0 & b & c & \dots \\ b & a & \dots\dots & \\ c & \dots\dots\dots & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \end{bmatrix}K_{12} \quad = \quad \begin{bmatrix} a & b & \dots\dots & \\ b & 0 & c & \dots \\ \cdot & c & \dots\dots & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \end{bmatrix}$$

$$H_{21}(-\tfrac{b}{a})\begin{bmatrix} a & b & c & \dots \\ b & & & \\ c & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \end{bmatrix}K_{21}(-\tfrac{b}{a}) \quad = \quad \begin{bmatrix} a & 0 & c & \dots \\ 0 & & & \\ c & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \end{bmatrix}$$

Comunque, quando l'elemento a della diagonale è sostituito da 1, la coppia di trasformazioni è $H_1(1/\sqrt{a})$ e $K_1(1/\sqrt{a})$. In genere $\sqrt{a}$ è irrazionale, o immaginaria; perciò questo procedimento non è consigliabile.

La massima convenienza si riscontra col metodo della partizione, giacché la (7.5) si riduce a:

$$\text{(7.6)} \qquad \begin{aligned} B_{11} &= A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{11}^{-1}A_{12})', & B_{21} &= B_{12}' \\ B_{12} &= -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}, & B_{22} &= \xi^{-1} \end{aligned}$$

in cui: $\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12})$.

Vedere il Problema 7.

Quando A è non simmetrica, detta procedura può essere usata per trovare l'inversa di $A'A$, che è simmetrica, e quindi l'inversa di A sarà data dalla:

$$\text{(7.7)} \qquad A^{-1} = (A'A)^{-1}A'$$

PROBLEMI RISOLTI

1. Dimostrare che una matrice quadrata A di ordine n ha una inversa solo ed esclusivamente se è non singolare.

   Supponiamo che A sia non singolare. Per il Teorema **IV**, cap. 5, esistono delle matrici P e Q non singolari tali che $PAQ = I$. Allora esisteranno $A = P^{-1}\cdot Q^{-1}$ e $A^{-1} = Q\cdot P$.

   Supponiamo invece che esista la A^{-1}. La $A\cdot A^{-1} = I$ è di rango n. Se A fosse singolare, AA^{-1} sarebbe di rango $< n$; quindi A è non singolare.

2. (*a*) Quando $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, allora è $|A| = 5$, agg $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$.

   (*b*) Quando $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, è $|A| = 18$, agg $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, e $A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Trovare l'inversa di $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$.

$$[A\ I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7/2 & 11 & 5/2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 18 & 13 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 18 & 13 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -23 & 29 & -64/5 & -18/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10 & -12 & 26/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 6/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

$$= [I_4\ A^{-1}]$$

L'inversa sarà: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -23 & 29 & -64/5 & -18/5 \\ 10 & -12 & 26/5 & 7/5 \\ 1 & -2 & 6/5 & 2/5 \\ 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$.

4. Risolvere $\begin{cases} \text{(i)}\ A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I & \text{(iii)}\ B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 \\ \text{(ii)}\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 & \text{(iv)}\ B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I \end{cases}$ per B_{11}, B_{12}, B_{21} e B_{22}.

   Poniamo $B_{22} = \xi^{-1}$. Dalla (ii) $B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}$; dalla (iii) $B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$; e dalla (i) $B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$.

   Infine, sostituendo nella (iv):

$$-\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})A_{12} + \xi^{-1}A_{22} = I \quad \text{e,} \quad \xi = A_{22} - (A_{21}A_{11}^{-1})A_{12}$$

5. Trovare l'inversa di $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ tramite partizione.

(*a*) Assumiamo $G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ e ripartiamola in modo che:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [2 \;\; 4], \quad \text{e} \quad A_{22} = [3]$$

Ora, è: $A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A_{21}A_{11}^{-1} = [2 \;\; 4]\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [2 \;\; 0]$.

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}) = [3] - [2 \;\; 4]\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = [-3], \quad \text{e} \quad \xi^{-1} = [-1/3]$$

Allora: $B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}\left[-\frac{1}{3}\right][2 \;\; 0] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \frac{1}{3}[2 \;\; 0], \quad B_{22} = \xi^{-1} = \left[-\frac{1}{3}\right]$$

e

$$G_3^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(*b*) Ripartiamo ora A in modo che $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A_{21} = [1 \;\; 1 \;\; 1]$ e $A_{22} = [1]$.

Ora, $A_{11}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_{11}^{-1}A_{12} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A_{21}A_{11}^{-1} = \frac{1}{3}[2 \;\; -3 \;\; 2]$.

$$\xi = [1] - [1 \;\; 1 \;\; 1](\tfrac{1}{3})\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \left[\tfrac{1}{3}\right], \quad \text{e} \quad \xi^{-1} = [3]$$

Allora $B_{11} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}[3]\frac{1}{3}[2 \;\; -3 \;\; 2] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 6 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = [-2 \;\; 3 \;\; -2], \quad B_{22} = [3]$$

e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Trovare, per partizione, l'inversa di $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Non possiamo assumere $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, essendo questa singolare.

Dall'Esempio 3, l'inversa di $H_{23}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = B$ è $B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Quindi:

$$A^{-1} = B^{-1}H_{23} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Così, se è singolare il minore A_{11}, quadrato di ordine $(n-1)$, della matrice quadrata A di ordine n non singolare, portiamo dapprima una matrice quadrata non singolare di ordine $(n-1)$ nell'angolo superiore sinistro per ottenere B; troviamo l'inversa di B; e con le opportune trasformazioni su B^{-1} otterremo A^{-1}.

7. Valutare l'inversa della matrice simmetrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Consideriamo dapprima la sub-matrice $G_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ripartita in modo che:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [-1 \;\; 2], \quad A_{22} = [1]$$

Ora: $A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$, $A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}) = [1] - [-1 \;\; 2]\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [-2] \quad \text{e} \quad \xi^{-1} = [-\tfrac{1}{2}]$$

E allora

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}[-\tfrac{1}{2}][-1 \;\; 1] = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B_{21} = [-\tfrac{1}{2} \;\; \tfrac{1}{2}], \quad B_{22} = [-\tfrac{1}{2}]$$

e

$$G_3^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora la matrice A ripartita in modo che:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [2 \;\; -3 \;\; -1], \quad A_{22} = [4]$$

Ancora $A_{11}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$, $A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\xi = [18/5]$, $\xi^{-1} = [5/18]$.

Allora: $B_{11} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 5 & -1 & 5 \\ -7 & 5 & 11 \end{bmatrix}$, $B_{12} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}$, $B_{21} = \frac{1}{18}[1 \; -2 \; 10]$, $B_{22} = [5/18]$

e

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & -2 \\ -7 & 5 & 11 & 10 \\ 1 & -2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

8. Trovare l'aggiunta e l'inversa di ciascuna delle seguenti matrici:

$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $(b) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $(c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $(d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Risp. Inverse: $(a) \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $(b) \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -10 & 4 & 9 \\ 15 & -4 & -14 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, $(c) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $(d) \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

9. Calcolare l'inversa della matrice (*d*) del Problema 8, in forma di somma diretta.

10. Ricavare le inverse delle matrici del Problema 8, usando il metodo del Problema 3.

11. Lo stesso, per le matrici $(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{bmatrix}$, $(b) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $(c) \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 4 & 12 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $(d) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Risp. $(a) \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 & 4 \\ 22 & 41 & -30 & -1 \\ -10 & -44 & 30 & -2 \\ 4 & -13 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ $(c) \frac{1}{48}\begin{bmatrix} -144 & 36 & 60 & 21 \\ 48 & -20 & -12 & -5 \\ 48 & -4 & -12 & -13 \\ 0 & 12 & -12 & 3 \end{bmatrix}$

$(b) \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 11 & 7 & -26 \\ -1 & -7 & -3 & 16 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $(d) \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 30 & -20 & -15 & 25 & -5 \\ 30 & -11 & -18 & 7 & -8 \\ -30 & 12 & 21 & -9 & 6 \\ -15 & 12 & 6 & -9 & 6 \\ 15 & -7 & -6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

12. Si usi il risultato dell'Esempio 4 per ottenere, tramite partizione, l'inversa della matrice del Problema 11(*d*).

13. Ricavare per partizione le inverse delle matrici dei Problemi 8(*a*), 8(*b*), 11(*a*) – 11(*c*).

14. Si ottengano per partizione le inverse delle matrici simmetriche: $(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $(b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Risp. $(a) -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $(b) \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

15. Dimostrare che: se A è non singolare, la relazione $AB = AC$ implica $B = C$.

16. Dimostrare che, commutando le matrici non singolari A e B, ugualmente commutano: (*a*) A^{-1} e B, (*b*) A e B^{-1}, (*c*) A^{-1} e B^{-1}. *Traccia:* (*a*) $A^{-1}(AB)A^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1}$.

17. Dimostrare che se la matrice non singolare A è simmetrica, è ugualmente simmetrica A^{-1}.
Traccia: $A^{-1}A = I = (AA^{-1})' = (A^{-1})'A$.

18. Dimostrare che se commutano le matrici simmetriche non singolari A e B, sono allora simmetriche le (*a*) $A^{-1}B$, (*b*) AB^{-1} e (*c*) $A^{-1}B^{-1}$. *Traccia:* (*a*) $(A^{-1}B)' = (BA^{-1})' = (A^{-1})'B' = A^{-1}B$.

19. Si dice che una matrice A di ordine $m \times n$ ha una inversa a destra B se $AB = I$, e una inversa a sinistra C se $CA = I$. Si dimostri che A possiede una inversa a destra solo ed esclusivamente se essa è di rango m, mentre possiede un'inversa a sinistra solo ed esclusivamente se il suo rango è n.

20. Trovare una inversa a destra della $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, se ne esiste una.

Traccia: Il rango di A è 3; la submatrice $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ è non singolare, di inversa S^{-1}. Una inversa a destra di A è la matrice di ordine 4×3; $B = \begin{bmatrix} S^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 17 & -9 & -5 \\ -4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

21. Dimostrare che la submatrice $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ della A del Problema 20 è non singolare, ottenendo poi la $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ come ulteriore inversa a destra di A.

22. Si ottenga $\begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & a \\ -3 & 1 & 0 & b \\ -3 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$ come inversa a sinistra di $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, essendo arbitrari *a*, *b*, *c*.

23. Dimostrare che $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ non ammette inversa né a destra né a sinistra.

24. Verificare che se $|A_{11}| \neq 0$, allora è: $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$.

25. Se $|I + A| \neq 0$, $(I + A)^{-1}$ e $(I - A)$ commutano.

26. Dimostrare la (i), Problema 23, cap. 6.

CAPITOLO 8

Campi

CAMPI NUMERICI. Un raggruppamento – o insieme – S di numeri reali o complessi, che comprende più dell'elemento zero, si dice campo numerico, allorché le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione (non per 0) di ogni coppia di quei numeri dia nuovamente luogo ad un numero di S.

Esempi di campi numerici sono:

(*a*) l'insieme di tutti i numeri razionali;
(*b*) l'insieme di tutti i numeri reali;
(*c*) l'insieme di tutti i numeri espressi dalla $a+b\sqrt{3}$, in cui a e b sono numeri razionali;
(*d*) l'insieme di tutti i numeri complessi $a+bi$, in cui a e b sono numeri reali.

L'insieme di tutti i numeri interi e l'insieme di tutti i numeri espressi dalla $b\sqrt{3}$, con b numero razionale, non sono campi numerici.

CAMPI GENERALI. Un raggruppamento – o insieme – S di due o più elementi uniti da due operazioni chiamate addizione (+) e moltiplicazione (·) può essere definito campo F nel caso che, essendo elementi di F – quindi scalari – $a, b, c, \ldots$

A_1: $a+b$ è un unico elemento di F

A_2: $a+b = b+a$

A_3: $a+(b+c) = (a+b)+c$

A_4: Per qualsiasi elemento a di F esiste in F un elemento 0 tale che $a+0 = 0+a = a$.

A_5: Per ogni elemento a di F esiste in F un unico elemento $-a$ tale che $a+(-a) = 0$.

M_1: $ab = a\cdot b$ è un unico elemento di F

M_2: $ab = ba$

M_3: $(ab)c = a(bc)$

M_4: Per ogni elemento a esiste in F un elemento $1 \neq 0$ tale che $1\cdot a = a\cdot 1 = a$.

M_5: Per ogni elemento $a \neq 0$ di F, esiste in F un unico elemento a^{-1} tale che $a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1$.

D_1: $a(b+c) = ab+ac$

D_2: $(a+b)c = ac+bc$

In aggiunta ai campi numerici suelencati, altri esempi di campi possono essere:

(*e*) l'insieme dei quozienti fra polinomi in x a coefficienti reali $\frac{P(x)}{Q(x)}$;

(*f*) l'insieme di tutte le matrici di ordine 2 x 2 nella forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, essendo a e b numeri reali;

(*g*) l'insieme in cui $a+a = 0$. Di questo campo, detto di caratteristica 2, in seguito non sarà tenuto conto. In esso, per esempio, non è valida la constatazione abituale che un determinante con due righe identiche è 0. Scambiando le due righe uguali, siamo condotti alla $D = -D$, ovvero $2D = 0$; ma D non è necessariamente 0.

SOTTOCAMPI. Se S e T sono campi, e se S è un sottoinsieme di T, si dice che S è un sottocampo di T. Per esempio, il campo di tutti i numeri reali è un sottocampo del campo di tutti i numeri complessi; il campo di tutti i numeri razionali è un sottocampo del campo di tutti i numeri reali, nonché di quello di tutti i numeri complessi.

MATRICI SU UN CAMPO. Quando tutti gli elementi di una matrice A appartengono ad un campo F si dice che "A è sopra F". Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/4 & 2/3 \end{bmatrix} \text{ è sopra il campo razionale, mentre } B = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 1-3i \end{bmatrix} \text{ è sopra il campo complesso.}$$

Qui – inoltre – A è anche sul campo reale, mentre B non lo è. Ancora, A è sul campo complesso.

Siano $A, B, C, \ldots$ delle matrici sopra lo stesso campo F, essendo F il più piccolo campo che ne contenga tutti gli elementi; ovvero, se tutti gli elementi sono dei numeri razionali, il campo F è il campo razionale, e non il reale o il complesso. Una scorsa alle varie operazioni definite nei precedenti capitoli per queste matrici, da sole o insieme, mostra che non sono mai necessari altri elementi oltre quelli contenuti in F. Per esempio:

Somma, differenza, prodotto sono matrici sopra F.

Se A è non singolare, la sua inversa è sopra F.

Se $A \sim I$, esistono delle matrici P e Q sopra F, tali che $PAQ = I$, e I è sopra F.

Se A è sopra il campo razionale ed è di rango r, il suo rango resta inalterato considerandola sul campo reale o su quello complesso.

Da ora in poi, quando si dirà che A è sopra F, sarà implicito che F è il campo più piccolo che di A contenga tutti gli elementi.

In capitoli successivi sarà alle volte necessario restringere il campo, magari a quello reale. In altri luoghi il campo degli elementi verrà esteso, per esempio dal razionale al reale. Altrimenti, la direzione "A sopra F" non implicherà alcuna restrizione del campo stesso, a parte quello – già escluso – di caratteristica due.

PROBLEMI RISOLTI

1. Si verifichi che l'insieme di tutti i numeri complessi costituisce un campo.

Ci limiteremo per questo a controllare le proprietà $A_1 - A_5$, $M_1 - M_5$, e $D_1 - D_2$. L'elemento zero (A_4) è zero; l'elemento uno (M_4) è 1. Se $a+bi$ e $c+di$ sono due elementi, il negativo (A_5) di $a+bi$ è $-a-bi$, il prodotto (M_1) è $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$; l'inversa (M_5) di $a+bi \neq 0$ è:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$$

La verifica delle restanti proprietà è lasciata al lettore per esercizio.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

2. Verificare che: (*a*) l'insieme di tutti i numeri reali di forma $a+b\sqrt{5}$ con a e b numeri razionali, nonchè

(*b*) l'insieme di tutti i quozienti $\frac{P(x)}{Q(x)}$ di polinomi in x a coefficienti reali, costituiscono campi.

3. Verificare che: (*a*) l'insieme di tutti i numeri razionali,
(*b*) l'insieme di tutti i numeri $a+b\sqrt{3}$, in cui a e b sono numeri razionali,
(*c*) l'insieme di tutti i numeri $a+bi$, con a e b numeri razionali,
sono sottocampi del campo complesso.

4. Si verifichi che l'insieme di tutte le matrici di ordine 2 x 2 nella forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, con a e b numeri razionali, forma un campo. Dimostrare che questo è a sua volta un sottocampo del campo di tutte le matrici di ordine 2 x 2 di forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, in cui a e b sono numeri reali.

5. Per qual motivo l'insieme di tutte le matrici di ordine 2 x 2 ad elementi reali non costituisce un campo?

6. Un insieme R di elementi $a, b, c, \ldots$ che soddisfano le condizioni $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5;\ M_1, M_3;\ D_1, D_2)$ di pag. 64 si chiama anello. Per mettere in risalto il fatto che la moltiplicazione non è commutabile, si può definire R come anello non commutativo. Quando un anello R soddisfa anche la M_2, esso si dice commutativo. Quando soddisfa la M_4, s'intende che esso è un anello con elemento unità.

Verificare che:

(*a*) l'insieme dei numeri interi pari $0, \pm 2, \pm 4, \ldots$ è un esempio di anello commutativo senza elemento unità;

(*b*) l'insieme di tutti i numeri interi $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ è un esempio di anello commutativo con elemento unità;

(*c*) l'insieme di tutte le matrici quadrate di ordine n, sopra F, è un esempio di anello non commutativo con elemento unità;

(*d*) l' insieme di tutte le matrici di ordine 2 x 2 nella forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, in cui a e b sono numeri reali, è un esempio di anello commutativo con elemento unità.

7. L'insieme (*a*) del Problema 6 può essere trasformato in anello commutativo con elemento unità aggiungendovi semplicemente ± 1?

8. Per il Problema 4, l'insieme (*d*) del Problema 6 è un campo. Si può dire che ogni campo è un anello? o che ogni anello commutativo con elemento unità è un campo?

9. Descrivere l'anello di tutte le matrici di ordine 2 x 2 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$, nelle quali a e b sono compresi in F. Se A è una matrice qualsiasi appartenente all'anello, e $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, dimostrare che è $LA = A$. Chiameremo L elemento unità a sinistra. Esiste un elemento unità a destra?

10. Sia C il campo di tutti i numeri complessi $p+qi$, e K il campo di tutte le matrici di ordine 2 x 2 $\begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix}$ in cui p, q, u, v sono numeri reali. Prendiamo il numero complesso $a+bi$ e la matrice $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ quali elementi corrispondenti dei due insiemi: ognuno sarà chiamato immagine dell'altro.

(*a*) Scrivere l'immagine di $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$; $3+2i$, 5.

(*b*) Dimostrare che l'immagine della somma (o prodotto) di due elementi di K è la somma (o prodotto) delle loro immagini comprese in C.

(*c*) Dimostrare che l'immagine della matrice identica elemento di K è l'elemento identico di C.

(*d*) Qual è l'immagine del coniugato di $a+bi$?

(*e*) Qual è l'immagine dell'inversa di $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$?

Questo è un esempio di isomorfismo fra due insiemi.

CAPITOLO 9

Dipendenza lineare di vettori e forme

LA COPPIA ORDINATA di numeri reali (x_1, x_2) viene usata per indicare un punto X nel piano. La stessa coppia di numeri, scritta come $[x_1, x_2]$, verrà qui usata per indicare il vettore a due dimensioni, o vettore 2, OX (v. fig. 9-1).
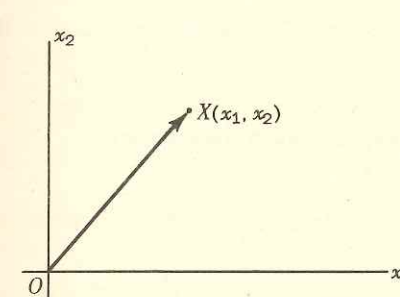
Fig. 9-1
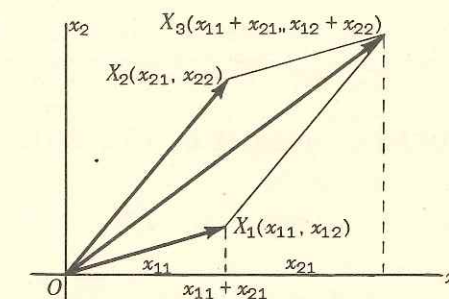
Fig. 9-2

Se $X_1 = [x_{11}, x_{12}]$ e $X_2 = [x_{21}, x_{22}]$ sono distinti vettori a due dimensioni, la legge del parallelogramma (v. fig. 9-2) darà per loro somma:

$$X_3 = X_1 + X_2 = [x_{11}+x_{21},\ x_{12}+x_{22}]$$

Considerando X_1 e X_2 come matrici di ordine 1 x 2, constatiamo che questa è semplicemente la regola per sommare matrici vista nel cap. 1. Inoltre, se k è uno scalare,

$$kX_1 = [kx_{11},\ kx_{12}]$$

che è la familiare moltiplicazione di un vettore per un numero reale nella fisica.

VETTORI. S'intende per vettore ad n dimensioni, o vettore n, X sopra F un insieme ordinato di n elementi x_i di F:

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \tag{9.1}$$

Gli elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono chiamati rispettivamente prima, seconda, . . . n-ma componente di X.

Troveremo in seguito più conveniente scrivere in colonna le componenti di un vettore:

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \tag{9.1'}$$

Ora, la (9.1) e (9.1') indicano lo stesso vettore; però chiameremo il (9.1) vettore riga, e il (9.1') vettore colonna. Potremo così considerare la matrice A di ordine $p \times q$ costituita da p vettori riga (essendo gli elementi di una riga le componenti di un vettore a q dimensioni) o da q vettori colonna.

Il vettore le cui componenti siano tutte zero si chiama vettore zero, e si indica con 0.

La somma e differenza di due vettori riga (o colonna), il prodotto di uno scalare e di un vettore, si formano con le regole usate per le matrici.

Esempio 1. Consideriamo i vettori a 3 dimensioni:

$$X_1 = [3,1,-4], \quad X_2 = [2,2,-3], \quad X_3 = [0,-4,1], \quad \text{e} \quad X_4 = [-4,-4,6]$$

(*a*) $2X_1 - 5X_2 = 2[3,1,-4] - 5[2,2,-3] = [6,2,-8] - [10,10,-15] = [-4,-8,7]$

(*b*) $2X_2 + X_4 = 2[2,2,-3] + [-4,-4,6] = [0,0,0] = 0$

(*c*) $2X_1 - 3X_2 - X_3 = 0$

(*d*) $2X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 0$

I vettori qui usati sono vettori riga. Si noti che se si pone l'apice a ciascuna parentesi ad indicare vettori colonna, il risultato è ugualmente corretto.

DIPENDENZA LINEARE DI VETTORI. Gli m vettori sopra F ad n dimensioni:

$$(9.2) \qquad \begin{aligned} X_1 &= [x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}] \\ X_2 &= [x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m &= [x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}] \end{aligned}$$

si dicono linearmente dipendenti su F purché esistano m elementi $k_1, k_2, \ldots, k_m$ di F, non tutti nulli, tali che:

$$(9.3) \qquad k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_mX_m = 0$$

Altrimenti gli m vettori si dicono linearmente indipendenti.

Esempio 2. Prendiamo i 4 vettori dell'Esempio 1. Per la (*b*) i vettori X_2 e X_4 sono linearmente dipendenti; lo stesso per X_1, X_2, X_3 per la (*c*); l'intero insieme lo è per la (*d*).

I vettori X_1 e X_2, però sono linearmente indipendenti. Poniamo infatti che sia il contrario:

$$k_1X_1 + k_2X_2 = [3k_1 + 2k_2, k_1 + 2k_2, -4k_1 - 3k_2] = [0,0,0]$$

Allora $3k_1 + 2k_2 = 0$, $k_1 + 2k_2 = 0$, e $-4k_1 - 3k_2 = 0$. Dalle prime due relazioni viene $k_1 = 0$ e quindi $k_2 = 0$.

Ogni vettore X ad n dimensioni e il vettore 0 di dimensione zero sono linearmente dipendenti.

Si dice che un vettore X_{m+1} è esprimibile come combinazione lineare dei vettori $X_1, X_2, \ldots, X_m$ se esistono degli elementi $k_1, k_2, \ldots, k_m$ di F tali che

$$X_{m+1} = k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_mX_m$$

TEOREMI FONDAMENTALI. Se nella (9.3) è $k_i \neq 0$, possiamo risolvere rispetto ad essa:

$$X_i = -\frac{1}{k_i}\{k_1X_1 + \cdots + k_{i-1}X_{i-1} + k_{i+1}X_{i+1} + \cdots + k_mX_m\}, \qquad \text{ovvero:}$$

$$(9.4) \qquad X_i = s_1X_1 + \cdots + s_{i-1}X_{i-1} + s_{i+1}X_{i+1} + \cdots + s_mX_m$$

Quindi:

I. Se m vettori sono linearmente dipendenti, qualcuno di essi può sempre essere espresso come combinazione lineare degli altri.

II. Se m vettori $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sono linearmente indipendenti, mentre l'insieme ottenuto aggiungendo loro un altro vettore X_{m+1} è linearmente indipendente, X_{m+1} può venire espresso come combinazione lineare di $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Esempio 3. Per l'esempio 2 i vettori X_1, e X_2 sono linearmente indipendenti, mentre X_1, X_2, e X_3 sono linearmente dipendenti: soddisfano infatti la relazione $2X_1 - 3X_2 - X_3 = 0$. Evidentemente, $X_3 = 2X_1 - 3X_2$.

III. Se tra gli m vettori $X_1, X_2, \ldots, X_m$ esiste un sottoinsieme di $r<m$ vettori linearmente dipendenti, i vettori dell'insieme tutto sono linearmente dipendenti.

Esempio 4. Per la relazione (*b*) dell' Esempio 1, i vettori X_2 e X_4 sono linearmente dipendenti; per la (*d*), l'insieme di quattro vettori è anche linearmente dipendente.

Vedere Problema 1.

IV. Se il rango della matrice

$$(9.5) \qquad A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}, \qquad m \leq n,$$

associata con gli m vettori (9.2) è $r<m$, esistono esattamente r vettori dell'insieme che sono linearmente indipendenti, mentre ognuno dei rimanenti m-r vettori può essere espresso come combinazione lineare degli r vettori stessi.

Vedere Problemi 2-3.

V. Condizione necessaria e sufficiente perché i vettori (9.2) siano linearmente dipendenti è che la matrice (9.5) dei vettori stessi sia di rango $r<m$. Se il rango è m, essi sono linearmente indipendenti.

L'insieme dei vettori (9.2) è di necessità linearmente dipendente se $m>n$.

Se l'insieme di vettori (9.2) è linearmente indipendente, ugualmente lo è ogni loro sottoinsieme.

UNA FORMA LINEARE sopra F in n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è costituita da un polinomio del tipo

$$(9.6) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_ix_i = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

i cui coefficienti sono compresi in F.

Consideriamo un sistema di m forme lineari in n variabili

$$(9.7) \qquad \begin{cases} f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

e la matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se esistono in F degli elementi $k_1, k_2, \ldots, k_m$, non tutti nulli, tali che:

$$k_1f_1 + k_2f_2 + \ldots + k_mf_m = 0$$

le forme (9.7) si dicono linearmente dipendenti; altrimenti esse sono linearmente indipendenti. Così la dipendenza, o indipendenza, lineare delle forme (9.7) equivale alla dipendenza, o indipendenza, lineare dei vettori riga della matrice A.

Esempio 5. Le forme $f_1 = 2x_1 - x_2 + 3x_3$, $f_2 = x_1 + 2x_2 + 4x_3$, $f_3 = 4x_1 - 7x_2 + x_3$ sono linearmente dipendenti, dal momento che $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$ è di rango 2. Avremo qui: $3f_1 - 2f_2 - f_3 = 0$.

Il sistema (9.7) è necessariamente dipendente nel caso in cui $m > n$. Perché?

PROBLEMI RISOLTI

1. Dimostrare: Se tra gli m vettori $X_1, X_2, \ldots, X_m$ esiste un sottoinsieme, diciamo $X_1, X_2, \ldots, X_r$, con $r < m$, che sia linearmente dipendente, ugualmente lo sono gli m vettori.

Dal momento che è per ipotesi $k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_rX_r = 0$, essendo i k non tutti nulli, avremo allora:

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_rX_r + 0 \cdot X_{r+1} + \cdots + 0 \cdot X_m = 0$$

ancora con gli elementi k non tutti nulli: l'intero insieme di vettori è linearmente dipendente.

2. Si dimostri che se il rango della matrice associata con un insieme di m vettori ad n dimensioni è $r < m$, vi sono esattamente r vettori linearmente indipendenti, mentre ciascuno dei restanti m-r vettori può essere scritto come combinazione lineare degli r vettori suddetti.

Sia la (9.5) la matrice; poniamo dapprima $m \leq n$. Se il minore della riga r-ma nell'angolo superiore sinistro è uguale a zero, scambiamo righe e colonne quanto necessario per portare in questa posizione un minore di riga r-ma non nullo. Rinumeriamo poi righe e colonne nell'ordine. Avremo così:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1r} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Consideriamo ora un minore di riga $(r+1)$-ma:

$$\nabla = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1r} & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2r} & x_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rr} & x_{rq} \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pr} & x_{pq} \end{vmatrix} = 0$$

in cui gli elementi x_{pj} e x_{iq} vengono rispettivamente da ogni riga e ogni colonna non comprese in Δ. Siano $k_1, k_2, \ldots, k_{r+1} = \Delta$ i rispettivi cofattori degli elementi $x_{1q}, x_{2q}, \ldots, x_{rq}, x_{pq}$ dell'ultima colonna di ∇. Allora per la (3.10) sarà:

$$k_1x_{1i} + k_2x_{2i} + \cdots + k_rx_{ri} + k_{r+1}x_{pi} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

e, per ipotesi:

$$k_1x_{1q} + k_2x_{2q} + \cdots + k_rx_{rq} + k_{r+1}x_{pq} = \nabla = 0$$

Si sostituisca ora l'ultima colonna di ∇ con una delle altre, diciamo quella con il numero u che non compare in Δ. I cofattori degli elementi di questa colonna sono i k già ottenuti, che danno luogo alla:

$$k_1x_{1u} + k_2x_{2u} + \cdots + k_rx_{ru} + k_{r+1}x_{pu} = 0$$

Così:

$$k_1x_{1t} + k_2x_{2t} + \cdots + k_rx_{rt} + k_{r+1}x_{pt} = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, n)$$

e sommando per tutti i valori di t:

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_rX_r + k_{r+1}X_p = 0$$

Poiché $k_{r+1} = \Delta \neq 0$, X_p è una combinazione lineare degli r vettori linearmente indipendenti $X_1, X_2, \ldots, X_r$. Ma X_p era uno qualsiasi fra gli m-r vettori $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_m$; quindi ognuno di questi può essere espresso come combinazione lineare di $X_1, X_2, \ldots, X_r$.

Nel caso in cui sia $m > n$, consideriamo la matrice quando ad ognuno degli m vettori dati siano sommate m-n componenti aggiuntive di valore nullo. Questa matrice sarà: $[A \mid 0]$. Evidentemente la dipendenza o indipendenza lineare dei vettori, e il rango stesso di A, non hanno subìto cambiamenti.

Così, in entrambi i casi, i vettori $X_{r+1}, \ldots, X_m$ sono combinazioni lineari dei vettori linearmente indipendenti $X_1, X_2, \ldots, X_r$, come occorreva dimostrare.

3. Dimostrare, servendosi di una matrice, che ogni tripla di vettori

$$(a)\quad \begin{aligned} X_1 &= [1, 2, -3, 4] \\ X_2 &= [3, -1, 2, 1] \\ X_3 &= [1, -5, 8, -7] \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad (b)\quad \begin{aligned} X_1 &= [2, 3, 1, -1] \\ X_2 &= [2, 3, 1, -2] \\ X_3 &= [4, 6, 2, -3] \end{aligned}$$

è linearmente indipendente. Determinare per ognuna il più grande sottocampo di vettori linearmente indipendenti, esprimendo i restanti come combinazioni lineari dei primi.

(*a*) In questo primo caso la $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 8 & -7 \end{bmatrix}$ è di rango 2; vi sono due vettori linearmente indipendenti, diciamo X_1 e X_2. Il minore $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Consideriamo allora il minore $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix}$. Cofattori degli elementi della terza colonna sono rispettivamente -14, 7 e -7. Allora: $-14X_1 + 7X_2 - 7X_3 = 0$ e $X_3 = -2X_1 + X_2$.

(*b*) Qui la $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ è di rango 2: ci sono due vettori linearmente indipendenti, siano X_1 e X_2. Ora, il minore $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$; scambiamo la seconda con la quarta colonna: avremo $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, per cui $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$.

I cofattori degli elementi nell'ultima colonna della $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ sono $2, 2, -2$ rispettivamente. Allora:

$$2X_1 + 2X_2 - 2X_3 = 0 \quad \text{e} \quad X_3 = X_1 + X_2$$

4. Siano $P_1(1,1,1)$, $P_2(1,2,3)$, $P_3(3,1,2)$, e $P_4(2,3,4)$ dei punti nello spazio ordinario. I punti P_1, P_2 insieme all'origine degli assi di riferimento determinano un piano π di equazione:

$$\text{(i)} \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y + z = 0$$

Sostituendo le coordinate di P_4 nel primo membro della (i), avremo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Dunque P_4 giace nel piano π. Il fatto significativo qui è che $[P_4, P_1, P_2]' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ è di rango 2.

Abbiamo così verificato che tre punti qualsiasi nello spazio ordinario giacciono su di un piano passante per l'origine, purché la matrice delle loro coordinate sia di rango 2.

Dimostrare che P_3 non appartiene al piano π.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

5. Dimostrare che se m vettori $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sono linearmente indipendenti, mentre l'insieme ottenuto aggiungendo un altro vettore X_{m+1} è linearmente dipendente, allora X_{m+1} si può esprimere in forma di combinazione lineare di $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

6. Dimostrare che l'espressione del vettore X_{m+1} nel Problema 5 è unica.

Traccia: Supponiamo che sia $X_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} k_i X_i = \sum_{i=1}^{n} s_i X_i$, e consideriamo $\sum_{i=1}^{m} (k_i - s_i) X_i$.

7. Dimostrare: Condizione necessaria e sufficiente perché i vettori (9.2) siano linearmente dipendenti è che la matrice (9.5) dei vettori stessi sia di rango $r<m$.

Traccia: Supponiamo che gli m vettori siano linearmente dipendenti: sussisterà la (9.4). Nella (9.5) sottraiamo alla i-ma riga il prodotto della prima per s_1, della seconda per s_2, ... come indicato nella (9.4). Per il reciproco si veda il problema 2.

8. Si esamini ciascuno dei seguenti insiemi di vettori, sul campo reale, controllandone la dipendenza – o indipendenza – lineare. Si scelga in ogni insieme dipendente il più grande sottoinsieme indipendente, esprimendo ciascuno dei vettori rimasti in forma di combinazione lineare di quelli del sottoinsieme stesso.

(a) $X_1 = [2,-1,3,2]$, $X_2 = [1,3,4,2]$, $X_3 = [3,-5,2,2]$

(b) $X_1 = [1,2,1]$, $X_2 = [2,1,4]$, $X_3 = [4,5,6]$, $X_4 = [1,8,-3]$

(c) $X_1 = [2,1,3,2,-1]$, $X_2 = [4,2,1,-2,3]$, $X_3 = [0,0,5,6,-5]$, $X_4 = [6,3,-1,-6,7]$

Risp. (a) $X_3 = 2X_1 - X_2$ (b) $X_3 = 2X_1 + X_2$, $X_4 = 5X_1 - 2X_2$ (c) $X_3 = 2X_1 - X_2$, $X_4 = 2X_2 - X_1$

9. Perché non possono esistere sopra F più di n vettori, ad n dimensioni, linearmente indipendenti?

10. Dimostrare che se nella (9.2) sussistono la $X_i = X_j$ o la $X_i = aX_j$, essendo a in F, l'insieme di vettori è linearmente dipendente. Il reciproco è vero?

11. Dimostrare che ogni vettore ad n dimensioni X ed il vettore di dimensione zero sono linearmente dipendenti; per questo, X e 0 si considerano proporzionali.

Traccia: Considerare $k_1 X + k_2 \cdot 0 = 0$, in cui $k_1 = 0$ e $k_2 \neq 0$.

12. (*a*) Dimostrare che $X_1 = [1, 1+i, i]$, $X_2 = [i, -i, 1-i]$ e $X_3 = [1+2i, 1-i, 2-i]$ sono linearmente dipendenti sul campo razionale e, quindi, sul campo complesso.

(*b*) Dimostrare che $X_1 = [1, 1+i, i]$, $X_2 = [i, -i, 1-i]$ e $X_3 = [0, 1-2i, 2-i]$ sono linearmente indipendenti sul campo reale ma dipendenti sul campo complesso.

13. Controllare la dipendenza o indipendenza delle seguenti forme lineari:

(a) $f_1 = 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4$, $f_2 = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4$, $f_3 = 5x_1 - 9x_2 + 8x_3 - x_4$

(b) $f_1 = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4$, $f_2 = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4$, $f_3 = 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4$

Risp. (a) $3f_1 - 2f_2 - f_3 = 0$

14. Si consideri la dipendenza o indipendenza lineare di un sistema di polinomi:

$$P_i = a_{i0}x^n + a_{i1}x^{n-1} + \cdots + a_{in-1}x + a_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

dimostrando che esso è linearmente dipendente o insipendente nello stesso modo in cui lo sono i vettori di riga della matrice dei coefficienti

$$A = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ovvero, secondo che il rango r di A è minore o uguale ad m.

15. Se i polinomi dei seguenti sistemi sono linearmente dipendenti, trovare una combinazione lineare che sia identicamente zero.

(a) $P_1 = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$, $P_2 = 2x^2 - 6x + 4$, $P_3 = x^3 - 2x^2 + x$

(b) $P_1 = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 3$, $P_2 = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$, $P_3 = x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 2$

Risp. (a) $2P_1 + P_2 - 2P_3 = 0$ (b) $P_1 + P_2 - 2P_3 = 0$

16. Determinare la dipendenza o indipendenza lineare di un insieme sopra F di matrici di ordine 2 x 2:

$M_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} p & q \\ s & t \end{bmatrix}$

Dimostrare che $k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3 = 0$, quando non tutti i k (in F) siano nulli, richiede che il rango della matrice $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ p & q & s & t \end{bmatrix}$ sia <3. (Si noti che le matrici M_1, M_2, M_3 s'intendono rappresentare dei vettori a 4 componenti).

Estendere il risultato ad un insieme di matrici di ordine $m \times n$.

17. Dimostrare che $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ sono linearmente dipendenti.

18. Dimostrare che ogni matrice di ordine 2 x 2 si può scrivere come combinazione lineare delle matrici $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, generalizzando per matrici di ordine $n \times n$.

19. Se i vettori $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ad n dimensioni sono linearmente indipendenti, dimostrare che i vettori $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, in cui $Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j$, ugualmente lo sono solo ed esclusivamente se $A = [a_{ij}]$ è non singolare.

20. Se A è di rango r, mostrare come si costruisce una matrice B non singolare tale che $AB = [C_1, C_2, \ldots, C_r, 0, \ldots, 0]$, in cui $C_1, C_2, \ldots, C_r$ sono un dato insieme di colonne di A linearmente indipendenti.

21. Dati i punti $P_1(1,1,1,1)$, $P_2(1,2,3,4)$, $P_3(2,2,2,2)$, e $P_4(3,4,5,6)$ dello spazio a quattro dimensioni:

(*a*) Dimostrare che il rango della $[P_1, P_3]'$ è 1, cioè i punti giacciono su di una retta per l'origine.

(*b*) Dimostrare che $[P_1, P_2, P_3, P_4]'$ è di rango 2, così che questi punti giacciono in un piano per l'origine.

(*c*) $P_5(2,3,2,5)$ giace nel piano del caso (*b*)?

22. Dimostrare che ogni matrice A sopra F, quadrata di ordine n, soddisfa un'equazione di forma:

$$A^p + k_1A^{p-1} + k_2A^{p-2} + \ldots + k_{p-1}A + k_pI = 0$$

in cui gli elementi k_i sono degli scalari di F.

Traccia: Si considerino $I, A, A^2, A^3, \ldots, A^{n^2}$ dal punto di vista del problema 16.

23. Trovare l'equazione di grado minimo (v. Problema 22) soddisfatta da:

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Risp. (*a*) $A^2 - 2A = 0$, (*b*) $A^2 - 2A + 2I = 0$, (*c*) $A^2 - 2A + I = 0$

24. Nel problema 23, casi (*b*) e (*c*), moltiplicare ogni equazione per A^{-1} ottenendo (*b*) $A^{-1} = I - \frac{1}{2}A$, (*c*) $A^{-1} = 2I - A$. Si verifica in tal modo che se A sopra F è non singolare, A^{-1} si può esprimere come un polinomio in A, i cui coefficienti sono scalari in F.

CAPITOLO 10

Equazioni lineari

DEFINIZIONI. Si consideri un sistema di m equazioni lineari in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$(10.1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = h_m \end{cases}$$

del quale coefficienti (*a*) e termini noti (*h*) sono in F.

Per soluzione in F del sistema s'intende ogni insieme di valori di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in F che soddisfi contemporaneamente le m equazioni. Quando il sistema ha una soluzione si dice consistente; altrimenti esso è inconsistente. Un sistema consistente o ha una sola, o ha infinite soluzioni.

Due sistemi di equazioni lineari sopra F, nello stesso numero di incognite, si dicono equivalenti se ogni soluzione di uno dei due lo è anche dell'altro. Si può ottenere dal (**10.1**) un sistema di equazioni ad esso equivalente applicando una o più delle seguenti trasformazioni: (*a*) scambiando due a due le equazioni; (*b*) moltiplicando ogni equazione per una costante non nulla di F; (*c*) sommando ad ogni equazione una costante multipla di un'altra equazione. La soluzione di un sistema consistente si ha sostituendo il sistema dato con un sistema equivalente di forma prescritta.

SOLUZIONE TRAMITE MATRICE. Nella notazione matriciale il sistema di equazioni lineari (**10.1**) si può scrivere:

$$(10.2) \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ h_m \end{bmatrix}$$

o, in forma più compatta:

$$(10.3) \qquad AX = H$$

in cui $A = [a_{ij}]$ è la matrice dei coefficienti, $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ e $H = [h_1, h_2, \ldots, h_m]'$.

Consideriamo ora per il sistema (**10.1**) la matrice incrementata:

$$(10.4) \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & h_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & h_m \end{bmatrix} = [A \quad H]$$

(Ogni riga della (**10.4**) è semplicemente una abbreviazione della corrispondente equazione in (**10.1**); per ricavare l'equazione dalla riga aggiungere le incognite e i segni + e = secondo il caso).

Per risolvere il sistema (**10.1**) per mezzo della (**10.4**) procediamo, tramite trasformazioni elementari di riga, a sostituire A con la matrice canonica equivalente per righe del cap. 5. Facendo questo operiamo su tutte le righe della (**10.4**).

Esempio 1. Risolvere il sistema
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}.$$

La matrice incrementata
$$[A \quad H] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Così la soluzione è il sistema equivalente di equazioni: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. In forma vettoriale avremo: $X = [1, 0, 1]'$.

TEOREMI FONDAMENTALI. La matrice dei coefficienti A nel sistema (**10.1**) venga ridotta alla forma canonica C equivalente per righe: supponiamo che $[A \quad H]$ sia ridotta a $[C \quad K]$, in cui $K = [k_1, k_2, \ldots, k_m]'$. Se A è di rango r, le prime r righe di C contengono uno o più elementi diversi da zero. Il primo elemento non nullo in ognuna di queste righe è 1, e la colonna in cui esso si trova ha tutti zeri come rimanenti elementi. Le altre righe consistono in zeri. Dalle prime r righe della $[C \quad K]$ possiamo ottenere ognuna delle variabili $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ (con la notazione del cap. 5) in termini delle restanti variabili $x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \ldots, x_{j_n}$, ed una delle $k_1, k_2, \ldots, k_r$.

Se $k_{r+1} = k_{r+2} = \ldots = k_m = 0$, la (**10.1**) è un sistema consistente, ed un insieme arbitrario di valori di $x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \ldots, x_{j_n}$, insieme ai valori risultanti per $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ costituiscono una soluzione. D'altro lato, se almeno uno fra i $k_{r+1}, k_{r+2}, \ldots, k_m$ è differente da zero, mettiamo $k_t \neq 0$, l'equazione corrispondente è:
$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = k_t \neq 0$$
e la (**10.1**) è un sistema inconsistente.

Nel caso di un sistema consistente A e $[A \quad H]$ hanno lo stesso rango; nel caso inconsistente hanno ranghi differenti. Allora:

I. Un sistema $AX = H$ di m equazioni lineari in n incognite è consistente solo ed esclusivamente se la matrice dei coefficienti e la matrice incrementata del sistema hanno lo stesso rango.

II. In un sistema consistente (**10.1**) di rango $r < n$, si possono scegliere $n - r$ incognite in modo che la matrice dei coefficienti con le rimanenti r incognite sia di rango r. Se a queste $n - r$ incognite sono assegnati dei valori qualsiasi, le altre r incognite sono univocamente determinate.

Esempio 2. Per il sistema
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 10 \end{cases}$$

$$[A \quad H] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -5 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & -8 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [C \quad K]$$

Poiché A e $[A \quad H]$ sono entrambe di rango $r = 3$, il sistema dato è consistente; inoltre la soluzione generale contiene $n - r = 4 - 3 = 1$ costanti arbitrarie. Dall'ultima riga di $[C \quad K]$, $x_4 = 0$. Sia $x_3 = a$, in cui a è arbitraria; allora $x_1 = 10 + 11a$ e $x_2 = -2 - 4a$. La soluzione del sistema è data da $x_1 = 10 + 11a$, $x_2 = -2 - 4a$, $x_3 = a$, $x_4 = 0$, ovvero $X = [10 + 11a, -2 - 4a, a, 0]'$.

Se un sistema consistente di equazioni su F ha un'unica soluzione (Esempio 1), quella soluzione è su F. Se il sistema ha infinite soluzioni (Esempio 2), esso avrà infinite soluzioni sopra F quando i valori arbitrari da assegnare sono ugualmente sopra F. Ad ogni modo il sistema ha infinite soluzioni su ogni campo $\mathfrak{F}$ di cui F sia sottocampo. Per esempio, il sistema dell'Esempio 2 ha infinite soluzioni su F (campo razionale) se a è limitato a numeri razionali; ha infinite soluzioni reali se a è limitato a numeri reali; ha infinite soluzioni complesse se a è un qualsiasi numero complesso.

Vedere Problemi 1-2.

EQUAZIONI NON OMOGENEE. Un'equazione lineare
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = h$$
si dice non omogenea se $h \neq 0$. Un sistema $AX = H$ si chiama sistema di equazioni non omogenee quando H non è un vettore zero. I sistemi degli Esempi 1 e 2 sono non omogenei.

Nel Problema 3 si dimostra:

III. Un sistema di n equazioni omogenee in n incognite ha un'unica soluzione purché il rango della matrice A dei coefficienti sia n, cioè: $|A| \neq 0$.

Oltre al metodo già visto, daremo adesso altri due procedimenti per risolvere un sistema consistente di n equazioni non omogenee in altrettante incognite $AX = H$. Il primo è la familiare soluzione coi determinanti.

(*a*) Soluzione con la regola di Cramer. Si indichi con A_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ la matrice ottenuta da A sostituendone l'i-ma colonna con la colonna dei termini noti h. Allora, se $|A| \neq 0$, il sistema $AX = H$ ha l'unica soluzione:

$$(\mathbf{10.5}) \qquad x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

Vedere Problema 4.

Esempio 3. Risolvere il sistema
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$
con la regola di Cramer.

Si trova:
$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -120, \qquad |A_1| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \\ 8 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -240$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \\ 3 & 8 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -24, \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

e infine:

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -96$$

Sarà allora: $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-240}{-120} = 2, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-24}{-120} = \frac{1}{5}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{0}{-120} = 0,$ e

$$x_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{-96}{-120} = \frac{4}{5}.$$

(*b*) Soluzione con l'uso della A^{-1}. Se $|A| \neq 0$, la A^{-1} esiste, e la soluzione del sistema $AX = H$ è data dalla:

(10.6) $$A^{-1} \cdot AX = A^{-1}H \quad \text{o} \quad X = A^{-1}H$$

Esempio 4. La matrice dei coefficienti per il sistema $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$ è $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Dal problema 2 caso (*b*), cap. 7, si ha: $A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

Allora:

$$A^{-1} \cdot AX = X = A^{-1}H = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 35 \\ 29 \\ 5 \end{bmatrix}$$

La soluzione del sistema è: $x_1 = 35/18, \ x_2 = 29/18, \ x_3 = 5/18$.

Vedere Problema 5.

EQUAZIONI OMOGENEE. Un'equazione lineare

(10.7) $$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

si chiama omogenea. Un sistema di equazioni lineari

(10.8) $$AX = 0$$

in n incognite è chiamato sistema di equazioni omogenee. Per il sistema (10.8) il rango della matrice dei coefficienti A e quello della matrice incrementata $[A \ \ 0]$ sono uguali; quindi il sistema è sempre consistente. Notare che $X = 0$, ovvero $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, è sempre una soluzione: essa viene definita soluzione triviale.

Se n è il rango di A, vuol dire che n delle equazioni del (10.8) possono essere risolte con la regola di Cramer per l'unica soluzione $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, ed il sistema ha solo la soluzione triviale. Se il rango di A è $r < n$, il Teorema **II** assicura l'esistenza di soluzioni non triviali. Quindi:

IV. Condizione necessaria e sufficiente perché il (10.8) abbia una soluzione oltre quella triviale è che il rango di A sia $r < n$.

V. Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema di n equazioni omogenee in n incognite abbia una soluzione oltre quella triviale è che sia $|A| = 0$.

VI. Se il rango di (10.8) è $r < n$, il sistema ha esattamente n-r soluzioni linearmente indipendenti, in modo che ogni soluzione è combinazione lineare delle dette, ed ogni combinazione lineare è una soluzione.

Vedere il Problema 6.

SIANO X_1 e X_2 due soluzioni distinte di $AX = H$. Allora $AX_1 = H$, $AX_2 = H$ e $A(X_1 - X_2) = AY = 0$. In tal modo, la $Y = X_1 - X_2$ è una soluzione non triviale di $AX = 0$.

Reciprocamente, se Z è una soluzione non triviale di $AX = 0$ e se X_p è una soluzione di $AX = H$, allora $X = X_p + Z$ è anche soluzione di $AX = H$. Come Z acquista il valore di soluzione completa di $AX = 0$, $X_p + Z$ acquista il valore di soluzione completa di $AX = H$. Allora:

VII. Se il sistema di equazioni non omogenee $AX = H$ è consistente, una sua soluzione completa è data dalla soluzione completa di $AX = 0$ più una soluzione particolare di $AX = H$.

Esempio 5. Nel sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$ poniamo $x_1 = 0$; sarà allora $x_3 = 2$ e $x_2 = 1$. Una soluzione particolare è quindi $X_p = [0, 1, 2]'$. Soluzione completa di $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ è invece: $[-7a, a, 3a]'$, con a arbitrario. Allora la soluzione completa del sistema dato sarà:

$$X = [-7a, a, 3a]' + [0, 1, 2]' = [-7a, 1+a, 2+3a]'$$

Nota. La procedura su descritta si può estendere a sistemi più ampi. Comunque, si deve prima dimostrare che il sistema è consistente. E' un miglioramento nella soluzione del sistema, rispetto al già visto metodo della matrice incrementata.

PROBLEMI RISOLTI

1. Risolvere: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}$.

Soluzione:

La matrice incrementata è:

$$[A \ \ H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Allora $x_1 = 1$, $x_2 - 2x_3 = 0$ e $x_4 + 3x_5 = 0$. Prendendo $x_3 = a$ e $x_5 = b$, con a e b arbitrari, la soluzione completa può essere data nella forma $x_1 = 1$, $x_2 = 2a$, $x_3 = a$, $x_4 = -3b$, $x_5 = b$, o come $X = [1, 2a, a, -3b, b]'$.

2. Risolvere $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$.

Soluzione:

$$[A \ \ H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

L'ultima riga dà $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -5$; allora il sistema dato è inconsistente, e non ha soluzione.

3. Dimostrare che un sistema $AX = H$ di n equazioni non omogenee in n incognite ha un'unica soluzione purché $|A| \neq 0$.

Se A è non singolare, essa è equivalente a I. Quando A sia ridotta ad I con trasformazioni di riga, si può pensare $[A \;\; H]$ ridotta a $[I \;\; K]$. Allora $X = K$ è una soluzione del sistema.

Supponiamo ora che $X = L$ sia una seconda soluzione del sistema; allora $AK = H$ e $AL = H$, e ancora $AK = AL$. Poiché A è non singolare, $K = L$, e la soluzione è unica.

4. Ricavare la regola di Cramer.

Il sistema di equazioni non omogenee sia:

$$(I) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = h_n \end{cases}$$

Indichiamo con A la matrice dei coefficienti $[a_{ij}]$ e con α_{ij} il cofattore di a_{ij} in A. Moltiplichiamo la prima equazione di (I) per α_{11}, la seconda per α_{21}, ..., l'ultima per α_{n1}, e sommiamo. Avremo:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\alpha_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\alpha_{i1}x_2 + \dots + \sum_{i=1}^{n} a_{in}\alpha_{i1}x_n = \sum_{i=1}^{n} h_i\alpha_i$$

che per i Teoremi **X** e **XI** e per il Problema 10, cap. 3, si riduce a:

$$|A|\cdot x_1 = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ h_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_1| \quad \text{così che } x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$$

Ancora, moltiplichiamo le equazioni di (I) rispettivamente per $\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{n2}$ e sommiamo, ottenendo:

$$|A|\cdot x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & h_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_2| \quad \text{così che } x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

Continuando così, moltiplichiamo alla fine le equazioni di (I) rispettivamente per $\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{nn}$ e sommiamo:

$$|A|\cdot x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & h_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & h_n \end{vmatrix} = |A_n| \quad \text{da cui: } x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

5. Risolvere il sistema $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$ usando l'inversa della matrice dei coefficienti.

Soluzione:

L'inversa di $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ è $\dfrac{1}{120}\begin{bmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{bmatrix}$. Allora:

$$X = \frac{1}{120}\begin{bmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

(Vedere l'Esempio 3).

6. Risolvere: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 \qquad\; + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

Soluzione:

$$[A \;\; H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La soluzione completa del sistema è $x_1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, $x_2 = -\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b$, $x_3 = a$, $x_4 = b$. Poiché il rango di A è 2, possiamo ottenere esattamente $n - r = 4 - 2 = 2$ soluzioni linearmente indipendenti. Tale coppia può essere, assumendo prima $a = 1$, $b = 1$ e poi $a = 3$; $b = 1$:

$$x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1 \quad \text{e} \quad x_1 = -1,\ x_2 = -3,\ x_3 = 3,\ x_4 = 1$$

Cosa si può dire della coppia di soluzioni ottenuta assumendo $a = b = 1$ e $a = b = 3$?

7. Dimostrare che in una matrice quadrata A di ordine n e rango $n - 1$ i cofattori degli elementi di ogni due righe (o colonne) sono proporzionali.

Poiché $|A| = 0$, i cofattori degli elementi di ogni riga, o colonna, di A sono una soluzione X_1 del sistema $AX = 0$ $(A'X = 0)$.

Ma il sistema non ha che una soluzione linearmente indipendente, poiché A (A') è di rango $n - 1$. Avremo quindi per i cofattori di un'altra riga, o colonna, di A (che sono un'altra soluzione X_2 del sistema): $X_2 = kX_1$.

8. Dimostrare che se $f_1, f_2, \dots, f_m$ sono $m < n$ forme linearmente indipendenti su F in n variabili, allora le p forme lineari

$$g_j = \sum_{i=1}^{m} s_{ij}f_i, \qquad (j = 1, 2, \dots, p)$$

sono linearmente dipendenti solo ed esclusivamente se la matrice $[s_{ij}]$ di ordine $m \times p$ è di rango $r < p$.

Le g sono linearmente dipendenti solo ed esclusivamente nel caso in cui esistano degli scalari $a_1, a_2, \dots, a_p$ in F, ncn tutti nulli, tali che:

$$\begin{aligned} a_1g_1 + a_2g_2 + \dots + a_pg_p &= a_1\sum_{i=1}^{m} s_{i1}f_i + a_2\sum_{i=1}^{m} s_{i2}f_i + \dots + a_p\sum_{i=1}^{m} s_{ip}f_i \\ &= \left(\sum_{j=1}^{p} a_js_{1j}\right)f_1 + \left(\sum_{j=1}^{p} a_js_{2j}\right)f_2 + \dots + \left(\sum_{j=1}^{p} a_js_{mj}\right)f_m \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{p} a_js_{ij}\right)f_i = 0 \end{aligned}$$

Poiché le f sono linearmente indipendenti, questo richiede:

$$\sum_{j=1}^{p} a_j s_{ij} = a_1 s_{i1} + a_2 s_{i2} + \dots + a_p s_{ip} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Ora, per il Teorema IV, il sistema di m equazioni omogenee in p incognite $\sum_{j=1}^{p} s_{ij} x_j = 0$ ha una soluzione non triviale $X = [a_1, a_2, \dots, a_p]'$ solo ed unicamente se $[s_{ij}]$ è di rango $r<p$.

9. Supponiamo che la $A = [a_{ij}]$ di ordine n sia singolare. Si dimostri che esiste sempre una matrice $B = [b_{ij}] \neq 0$ di ordine n tale che $AB = 0$.

Siano $B_1, B_2, \dots, B_n$ i vettori colonna di B. Allora, per ipotesi: $AB_1 = AB_2 = \dots = AB_n = 0$. Consideriamo uno di questi, diciamo $AB_t = 0$, ovvero:

$$\begin{cases} a_{11}b_{1t} + a_{12}b_{2t} + \dots + a_{1n}b_{nt} = 0 \\ a_{21}b_{1t} + a_{22}b_{2t} + \dots + a_{2n}b_{nt} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}b_{1t} + a_{n2}b_{2t} + \dots + a_{nn}b_{nt} = 0 \end{cases}$$

Dato che la matrice A dei coefficienti è singolare, il sistema nelle incognite $b_{1t}, b_{2t}, \dots, b_{nt}$ ha delle soluzioni oltre quella triviale. Similmente $AB_1 = 0$, $AB_2 = 0$, ... hanno delle soluzioni, ed ognuna è una colonna di B.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

10. Trovare tutte le soluzioni di:

(a) $x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

Risp. (a) $x_1 = 1 + 2a - b + 3c$, $x_2 = a$, $x_3 = b$, $x_4 = c$
(b) $x_1 = -7a/3 + 17/3$, $x_2 = 4a/3 - 5/3$, $x_3 = a$
(d) $x_1 = -x_2 = 1$, $x_3 = -x_4 = 2$

11. Calcolare tutte le soluzioni non triviali di:

(a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 11x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$

Risp. (a) $x_1 = -3a$, $x_2 = 0$, $x_3 = a$
(b) $x_1 = -x_2 = -x_3 = a$
(d) $x_1 = -\frac{5}{8}a + \frac{3}{8}b$, $x_2 = a$, $x_3 = \frac{7}{4}a - \frac{5}{4}b$, $x_4 = b$

12. Controllare che la soluzione del Problema 10, caso (d), sia d'accordo con l'altra $x_1 = c$, $x_2 = d$, $x_3 = -\frac{10}{3}c - \frac{d}{3}$, $x_4 = \frac{8}{3}c + \frac{5}{3}d$.

13. Data la $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, trovare una matrice B di rango 2 tale che $AB = 0$. *Traccia*: Prendere le colonne di B dalle soluzioni di $AX = 0$.

14. Dimostrare che una matrice quadrata è singolare solo ed unicamente se le sue righe, o colonne, sono linearmente dipendenti.

15. Sia $AX = 0$ un sistema di n equazioni omogenee in n incognite, e supponiamo che A sia di rango $r = n - 1$. Dimostrare che ogni vettore non nullo dei cofattori $[\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}]'$ di una riga di A è soluzione di $AX = 0$.

16. Con il problema 15 risolvere:

(a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

Traccia: Alle equazioni (a) aggiungere $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$ e trovare i cofattori degli elementi della terza riga di $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Risp. (a) $x_1 = -27a$, $x_2 = 0$, $x_3 = 9a$ o $[3a, 0, -a]'$, (b) $[2a, -7a, -17a]'$, (c) $[11a, -2a, -4a]'$

17. La matrice dei coefficienti e la matrice incrementata del sistema di 3 equazioni non omogenee a 5 incognite $AX = H$ sia di rango 2; la forma canonica della matrice incrementata sia:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b_{13} & b_{14} & b_{15} & c_1 \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} & b_{25} & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

essendo non nullo uno almeno fra c_1 e c_2. Scegliere prima $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ ottenendo $X_1 = [c_1, c_2, 0, 0, 0]'$ come soluzione di $AX = H$. Assumere quindi $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$, ed anche $x_3 = x_5 = 0$, $x_4 = 1$ e $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$ per avere altre soluzioni X_2, X_3, X_4. Dimostrare che queste $5 - 2 + 1 = 4$ soluzioni sono linearmente indipendenti.

18. Consideriamo la combinazione lineare $Y = s_1X_1 + s_2X_2 + s_3X_3 + s_4X_4$ delle soluzioni del Problema 17. Dimostrare che Y è una soluzione di $AX = H$ solo ed esclusivamente se (i) $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1$. In tal modo, con s_1, s_2, s_3, s_4 arbitrari tranne che nella (i), Y è una soluzione completa di $AX = H$.

19. Dimostrare il Teorema VI. *Traccia*: Seguire il Problema 17, ponendo $c_1 = c_2 = 0$.

20. Dimostrare che se A è una matrice di ordine $m \times p$ e rango r_1, e B è un'altra matrice di ordine $p \times n$ e rango r_2, tali che $AB = 0$, è allora $r_1 + r_2 \leq p$.

Traccia: Usare il Teorema VI.

21. Usando la matrice $A = [a_{ij}]$ di ordine 4×5 e rango 2, verificare: In una matrice A di ordine $m \times n$ e rango r, i determinanti quadrati di ordine r ricavati dalle colonne di una sub-matrice, che consista di r righe di A, sono proporzionali ai determinanti quadrati di ordine r ricavati da qualsiasi altra sub-matrice consistente ancora in r righe di A.

Traccia: Supponiamo che le prime due righe siano linearmente indipendenti: $a_{3j} = p_{31}a_{1j} + p_{32}a_{2j}$, $a_{4j} = p_{41}a_{1j} + p_{42}a_{2j}$, $(j = 1, 2, \dots, 5)$. Valutiamo ora i determinanti quadrati di ordine 2:

$$\begin{vmatrix} a_{1q} & a_{1s} \\ a_{2q} & a_{2s} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{1q} & a_{1s} \\ a_{3q} & a_{3s} \end{vmatrix}, \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} a_{3q} & a_{3s} \\ a_{4q} & a_{4s} \end{vmatrix}$$

22. Scrivere una dimostrazione per il Teorema del problema 21.

23. Ricavare dal Problema 7: Se la matrice A quadrata di ordine n è di rango $n-1$, sussistono fra i suoi cofattori le seguenti relazioni:

$$(a)\quad \alpha_{ij}\alpha_{hk} = \alpha_{ik}\alpha_{hj}, \qquad (b)\quad \alpha_{ii}\alpha_{jj} = \alpha_{ij}\alpha_{ji}$$

in cui $(h,i,j,k = 1,2,\ldots,n)$.

24. Dimostrare che $B = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&4\\ 1&2&3&-4&2\\ 2&1&1&2&6\\ 3&2&-1&-1&3\\ 1&2&2&-2&4\\ 2&3&-3&1&1 \end{bmatrix}$ è equivalente per righe a $\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$. Dalla $B = [A \quad H]$ dedurre che del sistema di 6 equazioni lineari a 4 incognite fanno parte 5 equazioni linearmente indipendenti. Dimostrare che un sistema di $m>n$ equazioni lineari in n incognite può avere al massimo $n+1$ equazioni linearmente indipendenti. Dimostrare che quando ve ne sono $n+1$, il sistema è inconsistente.

25. Se $AX = H$ è consistente e di rango r, per quale insieme di r variabili si può risolvere?

26. Estendere i risultati dei Problemi 17 e 18 ad m equazioni non omogenee in n incognite, con matrice dei coefficienti ed incrementata aventi lo stesso rango r. Dimostrare così che: Se la matrice dei coefficienti e la matrice incrementata del sistema $AX = H$ di m equazioni non omogenee in n incognite hanno rango r, e se $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r+1}$ sono soluzioni linearmente indipendenti del sistema stesso, allora:

$$X = s_1X_1 + s_1X_2 + \ldots + s_{n-r+1}X_{n-r+1}$$

in cui $\sum_{i=1}^{n-r+1} s_i = 1$ è una soluzione completa.

27. In una rete elettrica a quattro poli le grandezze d'ingresso E_1 e I_1 vengono espresse in termini delle grandezze d'uscita E_2 e I_2 dalle:

$$\begin{aligned} E_1 &= aE_2 + bI_2 \\ I_1 &= cE_2 + dI_2 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Dimostrare che $\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} a & -|A| \\ 1 & -d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} E_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} b & |A| \\ 1 & -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$.

Risolvere anche per E_2 e I_2, I_1 e I_2, I_1 e E_2.

28. Il sistema $AX = H$, $H \neq 0$ di n equazioni lineari in n incognite abbia un'unica soluzione. Dimostrare che il sistema $AX = K$ ha un'unica soluzione per ogni vettore ad n dimensioni $K \neq 0$.

29. Risolvere l'insieme di forme lineari $AX = \begin{bmatrix} 1&-1&1\\ 2&1&3\\ 1&2&3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix} = Y = \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{bmatrix}$ per le x_i forme lineari delle y.

Scrivere ora la soluzione di $A'X = Y$.

30. Sia A quadrata di ordine n e non singolare, e S_i sia la soluzione di $AX = E_i$, $(i = 1,2,\ldots,n)$, in cui E_i è il vettore ad n dimensioni, l'i-ma componente del quale è 1 e le altre sono zero. Individuare la matrice $[S_1, S_2, \ldots, S_n]$.

31. A sia una matrice di ordine $m \times n$, con $m < n$, e sia S_i una soluzione di $AX = E_i$, $(i = 1,2,\ldots,m)$, in cui E_i è il vettore ad m dimensioni, l'i-ma componente del quale è 1 e le altre sono zero. Se $K = [k_1, k_2, \ldots, k_m]'$, dimostrare che:

$$k_1S_1 + k_2S_2 + \ldots + k_mS_m$$

è una soluzione di $AX = K$.

CAPITOLO 11

Spazi vettoriali

SE NON VERRA' STABILITO DIVERSAMENTE, tutti i vettori saranno da adesso dei vettori colonna. Quando le componenti sono in evidenza, scriveremo $[x_1, x_2, \ldots, x_n]'$. Il segno di trasposizione (') indica che gli elementi vanno scritti in colonna.

Un insieme di simili vettori ad n dimensioni sopra F si dice che è chiuso rispetto alla addizione se la somma di ogni due di essi è un vettore dell'insieme. Esso è chiuso rispetto al prodotto scalare se ogni multiplo scalare di un vettore dell'insieme è ancora un vettore dell'insieme.

Esempio 1. (*a*) L'insieme di tutti i vettori $[x_1, x_2, x_3]'$ dello spazio ordinario aventi uguali componenti è chiuso sia rispetto all'addizione che per il prodotto scalare. Infatti la somma di ogni coppia di vettori e k volte ogni vettore (per k reale) sono ancora vettori di uguali componenti.

(*b*) L'insieme di tutti i vettori $[x_1, x_2, x_3]'$ dello spazio ordinario è chiuso rispetto all'addizione e al prodotto scalare.

SPAZI VETTORIALI. Ogni insieme di vettori ad n dimensioni sopra F, chiuso sia rispetto alla addizione che al prodotto scalare, si chiama spazio vettoriale. Quindi, se $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sono vettori ad n dimensioni sopra F, l'insieme di tutte le combinazioni lineari

$$(11.1)\qquad k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_mX_m \qquad (k_i \text{ in } F)$$

è uno spazio vettoriale sopra F. Per esempio, entrambi gli insiemi di vettori (*a*) e (*b*) dell'Esempio 1 sono spazi vettoriali. Ovviamente ogni spazio vettoriale (**11.1**) contiene il vettore con dimensione zero, il quale già da solo è uno spazio vettoriale. (Lo spazio (**11.1**) si chiama anche spazio vettoriale lineare.)

Il complesso $V_n(F)$ di tutti i vettori ad n dimensioni sopra F si chiama spazio vettoriale ad n dimensioni sopra F.

SOTTOSPAZI. Un insieme V di vettori di $V_n(F)$ si chiama sottospazio di $V_n(F)$, purché V sia chiuso rispetto all'addizione e al prodotto scalare. Così il vettore con dimensione zero è un sottospazio di $V_n(F)$; lo è lo stesso $V_n(F)$. L'insieme (*a*) dell'esempio 1 è un sottospazio (una retta) dello spazio ordinario. In generale, se $X_1, X_2, \ldots, X_m$ appartengono a $V_n(F)$, lo spazio di tutte le combinazioni lineari (**11.1**) è un sottospazio di $V_n(F)$.

Uno spazio vettoriale V si dice misurato o generato dai vettori ad n dimensioni $X_1, X_2, \ldots, X_m$ purché: (*a*) i vettori X_i siano compresi in V, (*b*) ogni vettore di V sia una combinazione lineare (**11.1**). Si noti che i vettori $X_1, X_2, \ldots, X_m$ non debbono necessariamente essere linearmente indipendenti.

Esempio 2. F sia il campo R dei numeri reali, così che i vettori a 3 dimensioni $X_1 = [1,1,1]'$, $X_2 = [1,2,3]'$, $X_3 = [1,3,2]'$ e $X_4 = [3,2,1]'$ siano compresi nello spazio ordinario $S = V_3(R)$. Ogni vettore $[a,b,c]'$ di S può essere espresso come:

$$y_1X_1 + y_2X_2 + y_3X_3 + y_4X_4 = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 \end{bmatrix}$$

dal momento che il risultante sistema di equazioni

$$\text{(i)} \quad \begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 &= a \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 &= b \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 &= c \end{aligned}$$

è consistente. Così i vettori X_1, X_2, X_3, X_4 misurano S.

I vettori X_1 e X_2 sono linearmente indipendenti. Essi misurano un sottospazio (il piano π) di S, che contiene tutti i vettori $hX_1 + kX_2$, con h e k numeri reali.

Il vettore X_4 misura un sottospazio (la retta L) di S, contenente tutti i vettori hX_4, con h numero reale.

Vedere il Problema 1.

BASE E DIMENSIONE. Per dimensione di uno spazio vettoriale V s'intende il massimo numero di vettori linearmente indipendenti contenuti in V oppure, il che è lo stesso, il minimo numero di vettori linearmente indipendenti necessari per misurare V. Nella geometria elementare lo spazio ordinario è uno spazio tridimensionale (spazio di dimensione 3) di punti (a, b, c). Qui lo abbiamo considerato come uno spazio tridimensionale di vettori $[a, b, c]'$. Il piano π dell'Esempio 2 ha dimensione 2, e la retta L ha dimensione 1.

Uno spazio vettoriale di dimensione r, costituito da vettori con dimensione n, si indicherà con $V_n^r(F)$. Quando $r = n$, potremo scrivere $V_n(F)$ invece di $V_n^n(F)$.

Un insieme di r vettori linearmente indipendenti compresi in $V_n^r(F)$ si chiama base dello spazio. Allora ogni vettore dello spazio è un'unica combinazione lineare dei vettori compresi in detta base. Tutte le basi di $V_n^r(F)$ hanno lo stesso numero di vettori, ma r vettori qualsiasi dello spazio linearmente indipendenti possono sempre fare da base.

Esempio 3. I vettori X_1, X_2, X_3 dell'Esempio 2 misurano S, dal momento che ogni vettore $[a, b, c]'$ di S si può esprimere così:

$$y_1X_1 + y_2X_2 + y_3X_3 = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \end{bmatrix}$$

Il risultante sistema di equazioni $\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = a \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 = b \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 = c \end{cases}$, diversamente dal sistema (*i*), ha un'unica soluzione. I vettori X_1, X_2, X_3 sono base di S. I vettori X_1, X_2, X_4 invece non lo sono (dimostrarlo). Essi misurano il subspazio π dell'Esempio 2, che ha per base l'insieme X_1, X_2.

I Teoremi I-V del cap. 9 possono naturalmente applicarsi qui. Il Teorema **IV**, specialmente, può essere enunciato così:

I. Se $X_1, X_2, \ldots, X_m$ è un insieme di vettori di dimensione n sopra F, e se r è il rango della matrice di ordine $m \times n$ delle loro componenti, è possibile scegliere nell'insieme r vettori linearmente indipendenti. Questi r vettori misurano un $V_n^r(F)$ in cui si trovano i restanti $m - r$ vettori.

Vedere i Problemi 2-3.

Di notevole importanza sono:

II. Se $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sono $m < n$ vettori ad n dimensioni linearmente indipendenti di $V_n(F)$, e se $X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n$ sono tutti gli $n - m$ vettori di $V_n(F)$ che insieme a $X_1, X_2, \ldots, X_m$ formano un insieme linearmente indipendente, allora l'insieme $X_1, X_2, \ldots, X_n$ è una base di $V_n(F)$.

Vedere il Problema 4.

III. Se $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sono $m < n$ vettori ad n dimensioni linearmente dipendenti sopra F, i p vettori

$$Y_j = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} X_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

sono linearmente dipendenti se $p > m$ ovvero, quando è $p \leq m$, se $[s_{ij}]$ è di rango $r < p$.

IV. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono dei vettori ad n dimensioni linearmente indipendenti sopra F, i vettori:

$$'Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sono linearmente indipendenti solo ed unicamente se $[a_{ij}]$ è non singolare.

SOTTOSPAZI IDENTICI. Se ${}_1V_n^r(F)$ e ${}_2V_n^r(F)$ sono due sottospazi di $V_n(F)$, essi sono identici solo ed esclusivamente se ogni vettore di ${}_1V_n^r(F)$ è un vettore di ${}_2V_n^r(F)$ e viceversa, ovvero solo ed esclusivamente se l'uno è sottospazio dell'altro.

Vedere il Problema 5.

SOMMA ED INTERSEZIONE DI DUE SPAZI. Siano $V_n^h(F)$ e $V_n^k(F)$ due spazi vettoriali. Per loro somma s'intende la totalità dei vettori $X + Y$ in cui X è in $V_n^h(F)$ e Y in $V_n^k(F)$. Evidentemente questo è uno spazio vettoriale: lo chiameremo spazio somma $V_n^s(F)$. La dimensione s dello spazio somma di due spazi vettoriali non è maggiore della somma delle singole dimensioni.

Per intersezione dei due spazi vettoriali s'intende la totalità dei vettori comuni ai due spazi. Ora, se X è un vettore comune ai due spazi lo è anche aX; ugualmente, se X e Y sono comuni ai due spazi lo è anche $aX + bY$. Così, l'intersezione di due spazi è uno spazio vettoriale: lo spazio intersezione $V_n^t(F)$. La dimensione dello spazio intersezione di due spazi vettoriali non può superare la minore fra le dimensioni dei due.

V. Se due spazi vettoriali $V_n^h(F)$ e $V_n^k(F)$ hanno $V_n^s(F)$ come spazio somma e $V_n^t(F)$ come spazio intersezione, vale la $h + k = s + t$.

Esempio 4. Consideriamo il sottospazio π_1 misurato dagli X_1 e X_2 dell'Esempio 2, e il sottospazio π_2 misurato da X_3 e X_4. Poiché π_1 e π_2 non sono identici (dimostrarlo), e inoltre i quattro vettori misurano S, lo spazio somma di π_1 e π_2 è S.

Ora, $4X_1 - X_2 = X_4$; dunque X_4 appartiene sia a π_1 che a π_2. Il sottospazio (retta L) misurato da X_4 è allora lo spazio intersezione di π_1 e π_2. Si noti che sia π_1 che π_2 sono di dimensione 2, S ha dimensione 3, L ha dimensione 1. Questo concorda con il Teorema **V**.

Vedere i Problemi 6-8.

NULLITA' DI UNA MATRICE. I vettori soluzione X di un sistema di equazioni omogenee $AX = 0$, costituiscono uno spazio vettoriale che si chiama spazio nullo di A. La dimensione di questo spazio, indicato con N_A, viene chiamata nullità di A.

Enunciando nuovamente il Teorema **VI** del cap. 10, abbiamo:

VI. Se A ha nullità N_A, la $AX = 0$ avrà N_A soluzioni linearmente indipendenti

$X_1, X_2, \ldots, X_{N_A}$ tali che ogni soluzione di $AX = 0$ è una loro combinazione lineare, ed ogni simile combinazione lineare è una soluzione.

Una base per lo spazio nullo di A è qualsiasi insieme di N_A soluzioni di $AX = 0$ linearmente indipendenti.

Vedere il Problema 9..

VII. Per una matrice A di ordine $m \times n$, rango r_A, nullità N_A:

$$r_A + N_A = n \tag{11.2}$$

REGOLE DI NULLITA' DI SYLVESTER. Se A e B sono di ordine n e i rispettivi ranghi sono r_A e r_B, il rango e la nullità del loro prodotto AB soddisfano le disuguaglianze:

$$\begin{aligned} r_{AB} &\geq r_A + r_B - n \\ N_{AB} &> N_A, \quad N_{AB} > N_B \\ N_{AB} &\leq N_A + N_B \end{aligned} \tag{11.3}$$

Vedere il Problema 10.

BASI E COORDINATE. I vettori ad n dimensioni

$$E_1 = [1, 0, 0, \ldots, 0]', \quad E_2 = [0, 1, 0, \ldots, 0]', \quad \ldots\ldots, \quad E_n = [0, 0, 0, \ldots, 1]'$$

si chiamano vettori elementari, o vettori unità, sopra F. Il vettore elementare E_j, la cui j-ma componente sia 1, si chiama j-mo vettore elementare. I vettori elementari $E_1, E_2, \ldots, E_n$ costituiscono una base importante per $V_n(F)$.

Ogni vettore $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ di $V_n(F)$ può essere unicamente espresso come somma

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \cdots + x_n E_n$$

dei vettori elementari. Le componenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di X si chiamano adesso coordinate di X relative alla base E. D'ora in poi, se non ci sarà un avviso contrario, assumeremo che un vettore X sia dato con riferimento a tale base.

Adesso $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sia un'altra base di $V_n(F)$. Esistono allora degli unici scalari $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in F tali che:

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i Z_i = a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \cdots + a_n Z_n$$

Questi scalari $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono le coordinate di X relative alla base Z. Ponendo $X_Z = [a_1, a_2, \ldots, a_n]'$, avremo

$$X = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_n] X_Z = Z \cdot X_Z \tag{11.4}$$

dove Z è la matrice, le cui colonne sono i vettori base $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$.

Esempio 5. Se $Z_1 = [2, -1, 3]'$, $Z_2 = [1, 2, -1]'$, $Z_3 = [1, -1, -1]'$ è una base di $V_3(F)$ e $X_Z = [1, 2, 3]'$ è un vettore di $V_3(F)$ relativo a detta base:

$$X = [Z_1, Z_2, Z_3] X_Z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = [7, 0, -2]'$$

relativo alla base E.

Vedere il Problema 11.

Sia ora $W_1, W_2, \ldots, W_n$ un'altra base di $V_n(F)$. Poniamo $X_W = [b_1, b_2, \ldots, b_n]'$, così che:

$$X = [W_1, W_2, \ldots, W_n] X_W = W \cdot X_W \tag{11.5}$$

Dalle (11.4) e (11.5): $X = Z \cdot X_Z = W \cdot X_W$ e

$$X_W = W^{-1} \cdot Z \cdot X_Z = P X_Z \tag{11.6}$$

in cui $P = W^{-1} Z$.

E perciò:

VIII. Se un vettore di $V_n(F)$ ha coordinate X_Z e X_W relative a due basi del $V_n(F)$ stesso, esiste una matrice non singolare P, determinata unicamente dalle due basi e data dalla (11.6), tale che $X_W = P X_Z$.

Vedere il Problema 12.

PROBLEMI RISOLTI

1. L'insieme di tutti i vettori $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]'$, in cui $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ è un sottospazio V di $V_4(F)$. Infatti la somma di ogni coppia di vettori dell'insieme ed ogni multiplo scalare di un vettore dell'insieme hanno delle componenti la cui somma è zero, cioè sono vettori dell'insieme.

2. Poiché $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ è di rango 2, i vettori $X_1 = [1, 2, 2, 1]'$, $X_2 = [3, 4, 4, 3]'$, e $X_3 = [1, 0, 0, 1]'$ sono linearmente dipendenti e misurano uno spazio vettoriale $V_4^2(F)$.

   A due a due questi vettori sono linearmente indipendenti; si può quindi prendere X_1 e X_2 o X_1 e X_3, o X_2 e X_3 come base di $V_4^2(F)$.

3. Poiché $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ è di rango 2, i vettori $X_1 = [1, 1, 1, 0]'$, $X_2 = [4, 3, 2, -1]'$, $X_3 = [2, 1, 0, -1]'$, e $X_4 = [4, 2, 0, -2]'$ sono linearmente dipendenti e misurano un $V_4^2(F)$.

   Possiamo prendere come base ogni coppia dei vettori suddetti, tranne X_3, X_4.

4. I vettori X_1, X_2, X_3 del Problema 2 si trovano in $V_4(F)$. Trovare una base.

   Come base di questo spazio possiamo prendere $X_1, X_2, X_4 = [1, 0, 0, 0]'$, e $X_5 = [0, 1, 0, 0]'$ oppure $X_1, X_2, X_6 = [1, 2, 3, 4]'$ e $X_7 = [1, 3, 6, 8]'$, ..., poiché le matrici $[X_1, X_2, X_4, X_5]$ e $[X_1, X_2, X_6, X_7]$ sono di rango 4.

5. Siano $X_1 = [1,2,1]'$, $X_2 = [1,2,3]'$, $X_3 = [3,6,5]'$, $Y_1 = [0,0,1]'$, $Y_2 = [1,2,5]'$ vettori di $V_3(F)$. Dimostrare che lo spazio misurato da X_1, X_2, X_3 e quello misurato da Y_1, Y_2 sono identici.

Notiamo prima di tutto che X_1 e X_2 sono linearmente indipendenti, mentre $X_3 = 2X_1 + X_2$. Allora gli X_i misurano uno spazio a due dimensioni, diciamo ${}_1V_3^2(F)$. E gli Y_i essendo linearmente indipendenti, misurano ancora uno spazio a due dimensioni: ${}_2V_3^2(F)$.

Poi, $Y_1 = \frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{2}X_1$, $Y_2 = 2X_2 - X_1$; $X_1 = Y_2 - 4Y_1$, $X_2 = Y_2 - 2Y_1$. Quindi ogni vettore $aY_1 + bY_2$ di ${}_2V_3^2(F)$ è un vettore $(\frac{1}{2}a + 2b)X_2 - (\frac{1}{2}a + b)X_1$ di ${}_1V_3^2(F)$ ed ogni vettore $cX_1 + dX_2$ di ${}_1V_3^2(F)$ è un vettore $(c+d)Y_2 - (4c+2d)Y_1$ di ${}_2V_3^2(F)$. Ne viene che i due spazi sono identici.

6. (*a*) Se $X = [x_1, x_2, x_3]'$ si trova nel $V_3^2(F)$ misurato da $X_1 = [1,-1,1]'$ e $X_2 = [3,4,-2]'$, abbiamo:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 3 \\ x_2 & -1 & 4 \\ x_3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0.$$

(*b*) Se $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]'$ si trova in $V_4^2(F)$ misurato da $X_1 = [1,1,2,3]'$ e $X_2 = [1,0,-2,1]'$,

allora $\begin{bmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 2 & -2 \\ x_4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ è di rango 2. Poiché $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, questo implica $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2x_1 +$

$4x_2 - x_3 = 0$ e $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = x_1 + 2x_2 - x_4 = 0.$

Questi problemi permettono di verificare che ogni $V_n^k(F)$ si può definire come la totalità delle soluzioni sopra F di un sistema $n-k$ equazioni lineari omogenee sopra F, linearmente indipendenti, in n incognite.

7. Dimostrare: Se due spazi vettoriali $V_n^h(F)$ e $V_n^k(F)$ hanno $V_n^s(F)$ come spazio somma e $V_n^t(F)$ come spazio intersezione, allora è $h + k = s + t$.

Poniamo $t = h$; allora $V_n^h(F)$ è un sottospazio di $V_n^k(F)$; loro spazio somma è lo stesso V_n^k. Così, $s = k$, $t = h$ e $s + t = h + k$. Il lettore dimostrerà che lo stesso vale per $t = k$.

Poniamo ora che $t < h$, $t < k$, e $X_1, X_2, \ldots, X_t$ misurino $V_n^t(F)$. Allora, per il Teorema II, esisteranno dei vettori $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \ldots, Y_h$ tali che $X_1, X_2, \ldots, X_t, Y_{t+1}, \ldots, Y_h$ misurino $V_n^h(F)$, e dei vettori $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_k$ tali che $X_1, X_2, \ldots, X_t, Z_{t+1}, \ldots, Z_k$ misurino $V_n^k(F)$.

Supponiamo infine che esistano degli scalari a e b tali che:

$$\textbf{(11.4)} \qquad \sum_{i=1}^{t} a_i X_i + \sum_{i=t+1}^{h} a_i Y_i + \sum_{i=t+1}^{k} b_i Z_i = 0, \text{ ovvero}$$

$$\sum_{i=1}^{t} a_i X_i + \sum_{i=t+1}^{h} a_i Y_i = \sum_{i=t+1}^{k} -b_i Z_i$$

Il vettore a sinistra appartiene a $V_n^h(F)$, mentre per il membro a destra appartiene anche a $V_n^k(F)$; esso appartiene dunque a $V_n^t(F)$. Ma $X_1, X_2, \ldots, X_t$ misurano $V_n^t(F)$: quindi $a_{t+1} = a_{t+2} = \ldots = a_h = 0$.

Ora, per la **(11.4)** è: $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} a_i X_i + \sum_{i=t+1}^{k} b_i Z_i = 0$

Ma i vettori X e Z sono linearmente indipendenti, in modo che: $a_1 = a_2 = \ldots = a_t = b_{t+1} = b_{t+2} = \ldots = b_k = 0$; allora gli X, Y, Z costituiscono un insieme linearmente indipendente, e misurano $V_n^s(F)$. E' allora $s = h + k - t$, come occorreva dimostrare.

8. Si consideri ${}_1V_3^2(F)$ avente per basi $X_1 = [1,2,3]'$ e $X_2 = [1,1,1]'$, nonché ${}_2V_3^2(F)$ che ha basi $Y_1 = [3,1,2]'$ e $Y_2 = [1,0,1]'$. Dato che la matrice delle componenti $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ è di rango 3, lo spazio somma sarà $V_3(F)$. Come base possiamo prendere X_1, X_2 e Y_1.

Dato che $h + k = s + t$, lo spazio intersezione è un $V_3^1(F)$. Per trovarne una base uguagliamo delle combinazioni lineari dei vettori costituenti a loro volta le basi di ${}_1V_3^2(F)$ e ${}_2V_3^2(F)$:

$$aX_1 + bX_2 = cY_1 + dY_2$$

assumendo opportunamente $d = 1$, si risolve $\begin{cases} a + b - 3c = 1 \\ 2a + b - c = 0 \\ 3a + b - 2c = 1 \end{cases}$ ottenendo $a = 1/3$, $b = -4/3$, $c = -2/3$.

Allora $aX_1 + bX_2 = [-1,-2/3,-1/3]'$ è una base dello spazio intersezione. Il vettore $[3,2,1]'$ è anche una base.

9. Si determini una base per lo spazio nullo di $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Considerare il sistema di equazioni $AX = 0$, che si riduce a $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

Una base per lo spazio nullo di A è la coppia di soluzioni linearmente indipendenti $[1,2,0,-1]'$ e $[2,1,-1,0]'$ delle equazioni suddette.

10. Dimostrare che $r_{AB} \geq r_A + r_B - n$.

Supponiamo dapprima che A abbia la forma $\begin{bmatrix} I_{r_A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Allora le prime r_A righe di AB coincidono con le prime r_A righe di B, mentre le righe restanti sono tutti zeri. Per il Problema 10 del cap. 5, il rango di AB è allora $r_{AB} \geq r_A + r_B - n$.

Poniamo adesso che A non abbia la forma suddetta. Esistono delle matrici non singolari P e Q tali che PAQ ha proprio quella forma, mentre il rango di $PAQB$ è esattamente quello di AB (perché?).

Il lettore può considerare il caso particolare di $B = \begin{bmatrix} I_{r_B} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

11. Sia $X = [1,2,1]'$ relativamente alla base E. Se ne trovino le coordinate relative ad un'altra base $Z_1 = [1,1,0]'$, $Z_2 = [1,0,1]'$ e $Z_3 = [1,1,1]'$.

Soluzione. (*a*) Scriviamo

(i) $X = aZ_1 + bZ_2 + cZ_3$, ovvero $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Allora $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a \quad + c = 2 \\ b + c = 1 \end{cases}$ con

$a = 0$, $b = -1$, $c = 2$. Così, relativamente alla base Z, avremo $X_Z = [0,-1,2]'$.

Soluzione (*b*) Riscriviamo la (i) come $X = [Z_1, Z_2, Z_3]X_Z = ZX_Z$, e avremo:

$$X_Z = Z^{-1}X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [0,-1,2]'$$

12. Siano X_Z e X_W le coordinate di un vettore X rispetto alle due basi $Z_1 = [1,1,0]'$, $Z_2 = [1,0,1]'$, $Z_3 = [1,1,1]'$ e $W_1 = [1,1,2]'$, $W_2 = [2,2,1]'$, $W_3 = [1,2,2]'$. Determinare la matrice P tale che $X_W = PX_Z$.

Qui è $Z = [Z_1, Z_2, Z_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $W = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, e $W^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Allora $P = W^{-1}Z = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ per la (**11.6**).

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

13. Sia $[x_1, x_2, x_3, x_4]'$ un arbitrario vettore di $V_4(R)$, in cui R indica il campo dei numeri reali. Quali fra i seguenti insiemi sono sottospazi di $V_4(R)$?

(*a*) Tutti i vettori con $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

(*b*) Tutti i vettori con $x_1 = x_2$, $x_3 = 2x_4$.

(*c*) Tutti i vettori con $x_4 = 0$.

(*d*) Tutti i vettori con $x_1 = 1$.

(*e*) Tutti i vettori completi di x_1, x_2, x_3, x_4

Risp. Tutti eccetto (*d*) ed (*e*).

14. Dimostrare che $[1,1,1,1]'$ e $[2,3,3,2]'$ sono una base del $V_4^2(F)$ nel Problema 2.

15. Determinare la dimensione dello spazio vettore misurato da ogni insieme dei vettori seguenti, scegliendo una base per ognuno.

(*a*) $[1,2,3,4,5]'$, $[5,4,3,2,1]'$, $[1,1,1,1,1]'$ (*b*) $[1,1,0,-1]'$, $[1,2,3,4]'$, $[2,3,3,3]'$ (*c*) $[1,1,1,1]'$, $[3,4,5,6]'$, $[1,2,3,4]'$, $[1,0,-1,-2]'$

Risp. (*a*), (*b*), (*c*), $r = 2$

16. (*a*) Dimostrare che i vettori $X_1 = [1,-1,1]'$ e $X_2 = [3,4,-2]'$ misurano lo stesso spazio che misurano $Y_1 = [9,5,-1]'$ e $Y_2 = [-17,-11,3]'$.

(*b*) Dimostrare che i vettori $X_1 = [1,-1,1]'$ e $X_2 = [3,4,-2]'$ non misurano lo stesso spazio misurato da $Y_1 = [-2,2,-2]'$ e $Y_2 = [4,3,1]'$.

17. Si dimostri che se l'insieme $X_1, X_2, \ldots, X_k$ è una base per $V_n^k(F)$, ogni altro vettore Y dello spazio si può rappresentare unicamente come combinazione lineare di $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

Traccia: Si assuma $Y = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i = \sum_{i=1}^{k} b_i X_i$.

18. Consideriamo la matrice di ordine 4×4 avente come colonne i vettori di una base del $V_4^2(R)$ nel Problema 2, e di una del $V_4^2(R)$ nel Problema 3. Dimostrare che il rango di detta matrice è 4 e $V_4(R)$ è lo spazio somma, mentre $V_4^0(R)$, spazio zero, è l'intersezione dei due spazi considerati.

19. Con la dimostrazione vista nel Problema 8, cap. 10, provare il Teorema **III**.

20. Dimostrare che lo spazio misurato da $[1,0,0,0,0]'$, $[0,0,0,0,1]'$, $[1,0,1,0,0]'$, $[0,0,1,0,0]'$, $[1,0,0,1,1]'$ e quello misurato da $[1,0,0,0,1]'$, $[0,1,0,1,0]'$, $[0,1,-2,1,0]'$, $[1,0,-1,0,1]'$, $[0,1,1,1,0]'$ hanno rispettivamente dimensione 4 e 3. Dimostrare che $[1,0,1,0,1]'$ e $[1,0,2,0,1]'$ sono una base dello spazio intersezione.

21. Trovare, relativamente alla base $Z_1 = [1,1,2]'$, $Z_2 = [2,2,1]'$, $Z_3 = [1,2,2]'$, le coordinate dei vettori (*a*) $[1,1,0]'$, (*b*) $[1,0,1]'$, (*c*) $[1,1,1]'$.

Risp. (*a*) $[-1/3, 2/3, 0]'$, (*b*) $[4/3, 1/3, -1]'$, (*c*) $[1/3, 1/3, 0]'$

22. Trovare rispetto alla base $Z_1 = [0,1,0]'$, $Z_2 = [1,1,1]'$, $Z_3 = [3,2,1]'$ le coordinate dei vettori (*a*) $[2,-1,0]'$, (*b*) $[1,-3,5]'$, (*c*) $[0,0,1]'$.

Risp. (*a*) $[-2,-1,1]'$, (*b*) $[-6,7,-2]'$, (*c*) $[-1/2, 3/2, -1/2]'$

23. Siano X_Z e X_W le coordinate di un vettore X rispetto alle coppie di basi che seguono. Determinare la matrice P per cui: $X_W = PX_Z$.

(*a*) $Z_1 = [1,0,0]'$, $Z_2 = [1,0,1]'$, $Z_3 = [1,1,1]'$; $W_1 = [0,1,0]'$, $W_2 = [1,2,3]'$, $W_3 = [1,-1,1]'$

(*b*) $Z_1 = [0,1,0]'$, $Z_2 = [1,1,0]'$, $Z_3 = [1,2,3]'$; $W_1 = [1,1,0]'$, $W_2 = [1,1,1]'$, $W_3 = [1,2,1]'$

Risp. (*a*) $P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, (*b*) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24. Dimostrare che se P_j è una soluzione di $AX = E_j$, $(j = 1,2,\ldots,n)$, allora $\sum_{i=1}^{n} h_j P_j$ è una soluzione di $AX = H$, in cui $H = [h_1, h_2, \ldots, h_n]'$.

Traccia: $H = h_1E_1 + h_2E_2 + \cdots + h_nE_n$.

25. Lo spazio vettoriale definito da tante combinazioni lineari delle colonne di una matrice A si chiama spazio colonna di A. Lo spazio vettoriale definito invece da combinazioni lineari delle righe di A si chiama spazio riga di A. Dimostrare che le colonne di AB si trovano nello spazio colonna della A, mentre le righe sono nello spazio riga di B.

26. Dimostrare che il sistema di m equazioni non omogenee in n incognite $AX = H$ è consistente solo ed esclusivamente se il vettore H appartiene allo spazio colonna di A.

27. Determinare una base per lo spazio nullo di (*a*) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (*b*) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Risp. (*a*) $[1,-1,-1]'$, (*b*) $[1,1,-1,-1]'$, $[1,2,-1,-2]'$

28. Provare le relazioni (*a*) $N_{AB} \geq N_A$, $N_{AB} \geq N_B$ (*b*) $N_{AB} \leq N_A + N_B$

Traccia: (*a*) $N_{AB} = n - r_{AB}$; $r_{AB} \leq r_A$ e r_B.

(*b*) Considerare $n - r_{AB}$, usando il teorema del Problema 10.

29. Trovare un modo di risolvere il Problema 16 usando solo trasformazioni di colonna su $A = [X_1, X_2, Y_1, Y_2]$. Risolvere poi il Problema 5.

CAPITOLO 12

Trasformazioni lineari

DEFINIZIONE. Siano due vettori $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ e $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$ di $V_n(F)$, con le coordinate riferite alla stessa base dello spazio. Supponiamo che dette coordinate siano legate dalla relazione

$$(12.1) \qquad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

o, più brevemente,

$$Y = AX$$

in cui $A = [a_{ij}]$ è sopra F. Allora la (12.1) è una trasformazione T che di solito trasporta ogni vettore X di $V_n(F)$ in un altro vettore Y dello stesso spazio, che si chiama immagine di X.

Se la (12.1) trasporta X_1 in Y_1 e X_2 in Y_2, allora:

(*a*) essa trasporta kX_1 in kY_1 per k scalare qualsiasi, e

(*b*) essa trasporta $aX_1 + bX_2$ in $aY_1 + bY_2$ per ogni coppia di scalari a e b. Per questo la trasformazione si chiama lineare.

Esempio 1. Consideriamo la trasformazione lineare $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} X$ nello spazio ordinario $V_3(R)$.

(*a*) L'immagine di $X = [2,0,5]'$ è $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 27 \\ 17 \end{bmatrix} = [12,27,17]'$.

(*b*) Il vettore X la cui immagine è $Y = [2,0,5]'$ si ottiene risolvendo $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Poiché $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 13/5 \\ 0 & 1 & 0 & 11/5 \\ 0 & 0 & 1 & -7/5 \end{bmatrix}$, è $X = [13/5, 11/5, -7/5]'$.

TEOREMI FONDAMENTALI. Se nella (12.1) è $X = [1,0,\ldots,0]' = E_1$, allora $Y = [a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}]'$ e, in genere, se $X = E_j$ vale la $Y = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}]'$. Quindi:

I. Una trasformazione lineare (12.1) è unicamente determinata quando le immagini – ovvero gli Y – dei vettori base sono conosciute, le rispettive colonne di A essendo coordinate delle immagini stesse di detti vettori.

Vedere il Problema 1.

Una trasformazione lineare (12.1) si dice non singolare se le immagini di distinti vettori X_i sono vettori distinti Y_i. Altrimenti la trasformazione è singolare.

II. Una trasformazione lineare (12.1) è non singolare solo ed unicamente se A, matrice della trasformazione, è non singolare.

Vedere il Problema 2.

III. Una trasformazione lineare non singolare trasporta vettori linearmente indipendenti (ovvero dipendenti) in vettori linearmente indipendenti (ovvero dipendenti).

Vedere il Problema 3.

Dal Teorema III segue:

IV. In una trasformazione (12.1) non singolare, l'immagine di uno spazio vettoriale $V_n^k(F)$ è uno spazio vettoriale $V_n^k(F)$, ovvero, la sua dimensione viene conservata. In particolare, la trasformazione è un tracciato di $V_n(F)$ su se stesso.

Quando A è non singolare, l'inversa della (12.1)

$$X = A^{-1}Y$$

trasporta l'insieme dei vettori $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, le cui componenti sono le colonne di A, nei vettori base dello spazio. Anche questa è una trasformazione lineare.

V. I vettori elementari E_i di $V_n(F)$ possono venir trasformati in qualsiasi insieme di n vettori ad n dimensioni linearmente indipendenti tramite una trasformazione lineare non singolare; e viceversa.

VI. Se $Y = AX$ trasforma un vettore X in un vettore Y, $Z = BY$ trasforma Y in Z, e se $W = CZ$ trasporta Z in W, allora la $Z = BY = (BA)X$ trasporta X in Z e la $W = (CBA)X$ trasporta X in W.

VII. Quando siano dati due insiemi qualsiasi di n vettori ad n dimensioni linearmente indipendenti, esiste una trasformazione lineare non singolare che trasporta i vettori di un insieme nei vettori dell'altro.

CAMBIAMENTO DI BASE. Relativamente ad una base Z, sia $Y_Z = AX_Z$ una trasformazione lineare di $V_n(F)$. Supponiamo che la base venga cambiata, e siano X_W e Y_W le coordinate di X_Z e Y_Z rispettivamente, rispetto alla nuova base. Per il Teorema VIII del Cap. 11 esiste una matrice P non singolare, tale che $X_W = PX_Z$ e $Y_W = PY_Z$, ovvero, ponendo $P^{-1} = Q$, tale che

$$X_Z = QX_W \quad \text{e} \quad Y_Z = QY_W$$

Allora $\qquad Y_W = Q^{-1}Y_Z = Q^{-1}AX_Z = Q^{-1}AQX_W = BX_W$

in cui:

$$(12.2) \qquad B = Q^{-1}AQ$$

Se per due matrici A e B esiste una matrice Q non singolare tale che $B = Q^{-1}AQ$, esse si dicono simili. Abbiamo così dimostrato:

VIII. Se $Y_Z = AX_Z$ è una trasformazione lineare di $V_n(F)$ relativa ad una base data (base Z), e $Y_W = BX_W$ è la stessa trasformazione lineare relativa ad un'altra base (base W), allora A e B sono simili.

Nota. Poiché $Q = P^{-1}$, la (12.2) si può scrivere come $B = PAP^{-1}$. Faremo più tardi lo studio di queste matrici, e scriveremo $B = R^{-1}AR$ invece di $B = SAS^{-1}$ ma non per necessità.

Esempio 2. Sia $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} X$ una trasformazione lineare relativa alla base E, e sia $W_1 = [1,2,1]'$, $W_2 = [1,-1,2]'$, $W_3 = [1,-1,-1]'$ una nuova base. (*a*) Dato il vettore $X = [3,0,2]'$, trovare le coordinate della sua immagine relativamente alla base W. (*b*) Trovare la trasformazione lineare $Y_W = BX_W$ corrispondente a $Y = AX$. (*c*) Usando il risultato avuto in (*b*), trovare l'immagine Y_W di $X_W = [1,3,3]'$.

$$\text{Scrivere } W = [W_1, W_2, W_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}; \text{ allora } W^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

(*a*) Relativamente alla base W il vettore ha coordinate $X_W = W^{-1}X = [1,1,1]'$. L'immagine di X è $Y = AX = [9,5,7]'$ ovvero, relativamente alla base W: $Y_W = W^{-1}Y = [14/3, 20/9, 19/9]'$.

(*b*) $$Y_W = W^{-1}Y = W^{-1}AX = (W^{-1}AW)X_W = BX_W = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 36 & 21 & -15 \\ 21 & 10 & -11 \\ -3 & 23 & -1 \end{bmatrix} X_W$$

(*c*) $$Y_W = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 36 & 21 & -15 \\ 21 & 10 & -11 \\ -3 & 23 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = [6,2,7]'.$$

Vedere il Problema 5.

PROBLEMI RISOLTI

1. (*a*) Stabilire la trasformazione lineare $Y = AX$ che trasporta E_1 in $Y_1 = [1,2,3]'$, E_2 in $[3,1,2]'$, ed E_3 in $Y_3 = [2,1,3]'$.
   (*b*) Trovare le immagini di $X_1 = [1,1,1]'$, $X_2 = [3,-1,4]'$, e $X_3 = [4,0,5]'$.
   (*c*) Dimostrare che X_1 e X_2 sono linearmente indipendenti, e così sono le loro immagini.
   (*d*) Dimostrare che X_1, X_2, e X_3 sono linearmente dipendenti, e lo sono ugualmente le loro immagini.

(*a*) Per il Teorema **I**, $A = [Y_1, Y_2, Y_3]$; l'equazione della trasformazione lineare sarà $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} X$.

(*b*) L'immagine di $X_1 = [1,1,1]'$ è $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [6,4,8]'$. Immagine di X_2 è $Y_2 = [8,9,19]'$, mentre quella di X_3 è $Y_3 = [14,13,27]'$.

(*c*) Il rango di $[X_1, X_2] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ è 2, come quello di $[Y_1, Y_2] = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 9 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}$. Così X_1 e X_2 sono linearmente indipendenti, come lo sono le loro immagini.

(*d*) Possiamo confrontare i ranghi di $[X_1, X_2, X_3]$ e $[Y_1, Y_2, Y_3]$; comunque, $X_3 = X_1 + X_2$ e $Y_3 = Y_1 + Y_2$, così che entrambi gli insiemi sono linearmente dipendenti.

2. Dimostrare che una trasformazione lineare (12.1) è non singolare solo ed esclusivamente se A è non singolare.

Poniamo che A sia non singolare, e le trasformate di $X_1 \neq X_2$ siano $Y = AX_1 = AX_2$. Allora $A(X_1 - X_2) = 0$, e il sistema di equazioni lineari omogenee $AX = 0$ ammette la soluzione non triviale $X = X_1 - X_2$. Questo è possibile solo ed unicamente se $|A| = 0$, contraddicendo l'ipotesi di A non singolare.

3. Dimostrare che una trasformazione lineare non singolare trasporta vettori linearmente indipendenti in altri vettori linearmente indipendenti.

Assumiamo il contrario: le immagini $Y_i = AX_i$, $(i = 1,2,\ldots,p)$ dei vettori linearmente indipendenti $X_1, X_2, \ldots, X_p$ siano linearmente dipendenti. Esistono allora degli scalari $s_1, s_2, \ldots, s_p$, non tutti uguali a zero, per cui

$$\sum_{i=1}^{p} s_i Y_i = s_1Y_1 + s_2Y_2 + \cdots + s_pY_p = 0$$

ovvero $$\sum_{i=1}^{p} s_i(AX_i) = A(s_1X_1 + s_2X_2 + \cdots + s_pX_p) = 0$$

Dal momento che A è non singolare, $s_1X_1 + s_2X_2 + \cdots + s_pX_p = 0$. Ma ciò è contrario all'ipotesi che gli X_i siano linearmente indipendenti. Dunque, le Y_i sono linearmente indipendenti.

4. Una certa trasformazione lineare $Y = AX$ trasporta $X_1 = [1,0,1]'$ in $[2,3,-1]'$, $X_2 = [1,-1,1]'$ in $[3,0,-2]'$, e $X_3 = [1,2,-1]'$ in $[-2,7,-1]'$. Trovare le immagini di E_1, E_2, E_3 e scrivere l'equazione della trasformazione.

Sia $aX_1 + bX_2 + cX_3 = E_1$; allora $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -b + 2c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases}$ e $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$. Così, $E_1 = -\frac{1}{2}X_1 + X_2 + \frac{1}{2}X_3$

e la sua immagine è $Y_1 = -\frac{1}{2}[2,3,-1]' + [3,0,-2]' + \frac{1}{2}[-2,7,-1]' = [1,2,-2]'$. Similmente l'immagine di E_2 è $Y_2 = [-1,3,1]'$ e l'immagine di E_3 è $Y_3 = [1,1,1]'$. L'equazione della trasformazione è

$$Y = [Y_1, Y_2, Y_3]X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$$

5. Se $Y_Z = AX_Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} X_Z$ è una trasformazione lineare relativa alla base Z del Problema 12, cap. 11, trovare la stessa trasformazione $Y_W = BX_W$ relativa alla base W di quel problema.

Dal Problema 12 del cap. 11 si ha $X_W = PX_Z = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} X_Z$. Allora:

$$X_Z = P^{-1}X_W = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} X_W = QX_W$$

e $$Y_W = PY_Z = Q^{-1}AX_Z = Q^{-1}AQX_W = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 14 & -6 \\ 7 & 14 & 9 \\ 0 & -9 & 3 \end{bmatrix} X_W$$

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

6. Dimostrare nel Problema 1: (*a*) la trasformazione è non singolare, (*b*) $X = A^{-1}Y$ trasporta i vettori colonna di A nei vettori elementari.

7. Usando la trasformazione del Problema 1 trovare: (*a*) l'immagine di $X = [1,1,2]'$, (*b*) il vettore X la cui immagine sia $[-2,-5,-5]'$. *Risp.* (*a*) $[8,5,11]'$, (*b*) $[-3,-1,2]'$.

8. Studiare l'effetto della trasformazione $Y = IX$, nonché $Y = kIX$.

9. Trovare la trasformazione lineare che trasporta E_1 in $[1,2,3]'$, E_2 in $[3,1,2]'$, E_3 in $[2,-1,-1]'$. Dimostrare che la trasformazione è singolare, e trasporta i vettori linearmente indipendenti $[1,1,1]'$ e $[2,0,2]'$ nello stesso vettore immagine.

10. Supponendo non singolare la (**12.1**), dimostrare che se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono linearmente dipendenti, ugualmente lo sono le loro immagini $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

11. Usando il Teorema **III** dimostrare che con una trasformazione non singolare la dimensione di spazio vettoriale resta immutata. *Traccia*: Considerare le immagini di una base di $V_n^k(F)$.

12. Data la trasformazione lineare $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} X$, dimostrare: (*a*) che è singolare, (*b*) che le immagini dei vettori linearmente indipendenti $X_1 = [1,1,1]'$, $X_2 = [2,1,2]'$, e $X_3 = [1,2,3]'$ sono linearmente dipendenti, (*c*) che l'immagine di $V_3(R)$ è un $V_3^2(R)$.

13. Data la trasformazione lineare $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} X$, dimostrare che: (*a*) essa è singolare, (*b*) l'immagine di ogni vettore del $V_3^2(R)$ misurato da $[1,1,1]'$ e $[3,2,0]'$ si trova nel $V_3^1(R)$ misurato da $[5,7,5]$

14. Dimostrare il Teorema **VII**.
Traccia: Siano X_i e Y_i, $(i = 1,2,\ldots,n)$, gli insiemi di vettori dati. La $Z = AX$ trasporti l'insieme X_i in E_i e la $Y = BZ$ porti E_i in Y_i.

15. Dimostrare che matrici simili hanno determinanti uguali.

16. Sia $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$ una trasformazione lineare relativa alla base E. Venga scelta una nuova base, diciamo $Z_1 = [1,1,0]'$, $Z_2 = [1,0,1]'$, $Z_3 = [1,1,1]'$; $X = [1,2,3]'$ sia relativo alla base E. Dimostrare che:
(*a*) $Y = [14,10,6]'$ è l'immagine di X nella trasformazione.
(*b*) X, riferito alla nuova base, ha coordinate $X_Z = [-2,-1,4]'$ e Y ha coordinate $Y_Z = [8,4,2]'$.
(*c*) $X_Z = PX$ e $Y_Z = PY$, in cui $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [Z_1, Z_2, Z_3]^{-1}$.
(*d*) $Y_Z = Q^{-1}AQX_Z$, in cui $Q = P^{-1}$

17. Data la trasformazione lineare $Y_W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_W$, relativa alla base W: $W_1 = [0,-1,2]'$, $W_2 = [4,1,0]'$, $W_3 = [-2,0,-4]'$, trovarne la rappresentazione con riferimento alla base Z: $Z_1 = [1,-1,1]'$, $Z_2 = [1,0,-1]'$, $Z_3 = [1,2,1]'$.

Risp. $Y_Z = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} X_Z$

18. Se nella trasformazione lineare $Y = AX$, A è singolare, lo spazio nullo di A è lo spazio vettoriale ogni vettore del quale si trasforma nel vettore zero. Determinare lo spazio nullo della trasformazione: (*a*) del Problema 12, (*b*) del Problema 13, (*c*) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} X$.

Risp. (*a*) $V_3^1(R)$, misurato da $[1,-1,1]'$
(*b*) $V_3^1(R)$, misurato da $[2,1,-1]'$
(*c*) $V_3^2(R)$, misurato da $[2,-1,0]'$ e $[3,0,-1]'$

19. Se $Y = AX$ trasporta ogni vettore di uno spazio vettoriale V_n^h in un altro dello stesso spazio, V_n^h si chiama spazio invariante della trasformazione. Dimostrare che nello spazio reale $V_3(R)$, sotto la trasformazione lineare:

(*a*) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} X$, lo spazio V_3^1 misurato da $[1,-1,0]'$, il V_3^1 misurato da $[2,-1,-2]'$ ed il V_3^1 misurato da $[1,-1,-2]'$ sono spazi vettoriali invarianti.

(*b*) $Y = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} X$, il V_3^1 misurato da $[1,1,1]'$ e il V_3^2 misurato da $[1,0,-1]'$ e $[2,-1,0]'$ sono spazi invarianti. (Notare che ogni vettore del V_3^2 viene trasportato in se stesso).

(*c*) $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix} X$, il V_4^1 misurato da $[1,1,1,1]'$ è uno spazio vettoriale invariante.

20. Consideriamo la trasformazione lineare $Y = PX$: $y_i = x_{j_i}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ in cui $j_1, j_2, \ldots, j_n$ è una permutazione di $1, 2, \ldots, n$.
(*a*) Scrivere la matrice permutazione P.
(*b*) Dimostrare che esistono $n!$ matrici permutazione di ordine n.
(*c*) Dimostrare: se P_1 e P_2 sono delle matrici permutazione, lo sono anche $P_3 = P_1P_2$ e $P_4 = P_2P_1$.
(*d*) Dimostrare che se P è una matrice permutazione, lo sono anche P' e $PP' = I$.
(*e*) Dimostrare che ogni matrice permutazione P si può esprimere come prodotto di un certo numero delle matrici elementari di colonna $K_{12}, K_{23}, \ldots, K_{n-1,n}$.
(*f*) Scrivere $P = [E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_n}]$ in cui $i_1, i_2, \ldots, i_n$ è una permutazione di $1, 2, \ldots, n$ e gli E_{i_j} sono i vettori elementari ad n dimensioni. Trovare una regola (non quella con $P^{-1} = P'$) per scrivere la P^{-1}. Per esempio, per $n = 4$ e $P = [E_3, E_1, E_4, E_2]$, sarà $P^{-1} = [E_2, E_4, E_1, E_3]$; per $P = [E_4, E_2, E_1, E_3]$, sarà $P^{-1} = [E_3, E_2, E_4, E_1]$.

CAPITOLO 13

Vettori nel campo reale

PRODOTTO INTERNO. In questo capitolo tutti i vettori sono reali, e $V_n(R)$ è lo spazio di tutti i vettori reali ad n dimensioni. Se $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ e $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$ sono due vettori di $V_n(R)$, il loro prodotto interno viene definito come lo scalare:

$$(13.1) \qquad X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Esempio 1. Per i vettori $X_1 = [1,1,1]'$, $X_2 = [2,1,2]'$, $X_3 = [1,-2,1]'$:

(a) $X_1 \cdot X_2 = 1\cdot2 + 1\cdot1 + 1\cdot2 = 5$
(b) $X_1 \cdot X_3 = 1\cdot1 + 1(-2) + 1\cdot1 = 0$
(c) $X_1 \cdot X_1 = 1\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1 = 3$
(d) $X_1 \cdot 2X_2 = 1\cdot4 + 1\cdot2 + 1\cdot4 = 10 = 2(X_1 \cdot X_2)$

Nota. Il prodotto interno viene spesso definito così:

$$(13.1') \qquad X \cdot Y = X'Y = Y'X$$

L'uso di $X'Y$ e $Y'X$ aiuta; comunque, $X'Y$ e $Y'X$ sono delle matrici di ordine 1×1, mentre $X \cdot Y$ è l'elemento della matrice. Con questa intesa la **(13.1')** sarà usata in appresso. Alcuni autori scrivono $X|Y$ per $X \cdot Y$. Nell'analisi vettoriale il prodotto interno si chiama prodotto scalare (inglese: *dot product*).

Sono immediate le seguenti regole per prodotti interni:

(a) $X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot X_1, \quad X_1 \cdot kX_2 = k(X_1 \cdot X_2)$

(13.2) (b) $X_1 \cdot (X_2 + X_3) = (X_2 + X_3) \cdot X_1 = X_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot X_3$

(c) $(X_1 + X_2) \cdot (X_3 + X_4) = X_1 \cdot X_3 + X_1 \cdot X_4 + X_2 \cdot X_3 + X_2 \cdot X_4$

VETTORI ORTOGONALI. Due vettori X e Y di $V_n(R)$ si dicono ortogonali se il loro prodotto interno è 0. I vettori X_1 e X_3 dell'Esempio 1 sono ortogonali.

LA LUNGHEZZA DI UN VETTORE X di $V_n(R)$, indicata con $\|X\|$, è definita come radice quadrata del prodotto interno di X con X, cioè:

$$(13.3) \qquad \|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Esempio 2. Dall'Esempio 1, caso (c), $\|X_1\| = \sqrt{3}$.

Vedere i Problemi 1-2.

Usando le **(13.1)** e **(13.3)** si può dimostrare che

$$(13.4) \qquad X \cdot Y = \tfrac{1}{2}\{\|X+Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2\}$$

Un vettore X la cui lunghezza sia $\|X\| = 1$ si dice vettore unità. I vettori elementari E_i sono esempi di vettori unità.

LA DISEGUAGLIANZA DI SCHWARZ. Se X ed Y sono vettori di $V_n(R)$, allora:

$$(13.5) \qquad |X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

ovvero, il valore numerico del prodotto interno di due vettori reali è pari al massimo al prodotto delle loro lunghezze.

Vedere il Problema 3.

LA DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE. Se X ed Y sono dei vettori di $V_n(R)$, vale la:

$$(13.6) \qquad \|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

VETTORI E SPAZI ORTOGONALI. Se $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sono $m \leq n$ vettori ad n dimensioni, non nulli e reciprocamente ortogonali, e se $c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_mX_m = 0$, allora per $i = 1,2,\ldots,m$, $(c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_mX_m) \cdot X_i = 0$. Richiedendo ciò che sia $c_i = 0$ per $i = 1,2,\ldots,m$, abbiamo:

I. Ogni insieme di $m \leq n$ vettori ad n dimensioni, non nulli e reciprocamente ortogonali, è un insieme linearmente indipendente e misura uno spazio vettoriale $V_n^m(R)$.

Un vettore Y si dice ortogonale ad uno spazio vettoriale $V_n^m(R)$ se è ortogonale a ciascun vettore di quello spazio.

II. Se un vettore Y è ortogonale a ciascuno dei vettori ad n dimensioni $X_1, X_2, \ldots, X_m$, esso è ortogonale allo spazio da essi misurato.

Vedere il Problema 4.

III. Se $V_n^h(R)$ è un subspazio di $V_n^k(R)$, essendo $k > h$, esiste almeno un vettore X di $V_n^k(R)$ ortogonale a $V_n^h(R)$.

Vedere il Problema 5.

Poiché dei vettori reciprocamente ortogonali sono linearmente indipendenti, uno spazio vettoriale $V_n^m(R)$, con $m > 0$, non può contenere più di m vettori mutuamente ortogonali. Supponiamo di aver trovato $r < m$ vettori fra loro ortogonali in $V_n^m(R)$. Essi misurano $V_n^r(R)$, subspazio di $V_n^m(R)$; e per il Teorema **III** esiste almeno un vettore di $V_n^m(R)$ ortogonale al $V_n^r(R)$. Abbiamo ora $r+1$ vettori fra loro ortogonali in $V_n^m(R)$, e ripetendo il ragionamento si dimostra:

IV. Ogni spazio vettoriale $V_n^m(R)$, con $m > 0$, contiene m e non più di m vettori reciprocamente ortogonali.

Due spazi vettoriali si dicono ortogonali se ogni vettore dell'uno è ortogonale ad ogni vettore dell'altro. Per esempio, lo spazio misurato da $X_1 = [1,0,0,1]'$ e $X_2 = [0,1,1,0]'$ è ortogonale allo spazio generato da $X_3 = [1,0,0,-1]'$ e $X_4 = [0,1,-1,0]'$, poiché $(aX_1 + bX_2) \cdot (cX_3 + dX_4) = 0$ per qualsiasi a, b, c, d.

CAPITOLO 13

Vettori nel campo reale

PRODOTTO INTERNO. In questo capitolo tutti i vettori sono reali, e $V_n(R)$ è lo spazio di tutti i vettori reali ad n dimensioni. Se $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ e $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$ sono due vettori di $V_n(R)$, il loro prodotto interno viene definito come lo scalare:

$$X \cdot Y \quad = \quad x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \tag{13.1}$$

Esempio 1. Per i vettori $X_1 = [1,1,1]'$, $X_2 = [2,1,2]'$, $X_3 = [1,-2,1]'$:

(a) $X_1 \cdot X_2 = 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 = 5$

(b) $X_1 \cdot X_3 = 1\cdot 1 + 1(-2) + 1\cdot 1 = 0$

(c) $X_1 \cdot X_1 = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3$

(d) $X_1 \cdot 2X_2 = 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 1\cdot 4 = 10 = 2(X_1 \cdot X_2)$

Nota. Il prodotto interno viene spesso definito così:

$$X \cdot Y \quad = \quad X'Y \quad = \quad Y'X \tag{13.1'}$$

L'uso di $X'Y$ e $Y'X$ aiuta; comunque, $X'Y$ e $Y'X$ sono delle matrici di ordine 1×1, mentre $X \cdot Y$ è l'elemento della matrice. Con questa intesa la **(13.1')** sarà usata in appresso. Alcuni autori scrivono $X|Y$ per $X \cdot Y$. Nell'analisi vettoriale il prodotto interno si chiama prodotto scalare (inglese: *dot product*).

Sono immediate le seguenti regole per prodotti interni:

(13.2)

(a) $X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot X_1$, $\quad X_1 \cdot kX_2 = k(X_1 \cdot X_2)$

(b) $X_1 \cdot (X_2 + X_3) = (X_2 + X_3) \cdot X_1 = X_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot X_3$

(c) $(X_1 + X_2) \cdot (X_3 + X_4) = X_1 \cdot X_3 + X_1 \cdot X_4 + X_2 \cdot X_3 + X_2 \cdot X_4$

VETTORI ORTOGONALI. Due vettori X e Y di $V_n(R)$ si dicono ortogonali se il loro prodotto interno è 0. I vettori X_1 e X_3 dell'Esempio 1 sono ortogonali.

LA LUNGHEZZA DI UN VETTORE X di $V_n(R)$, indicata con $\|X\|$, è definita come radice quadrata del prodotto interno di X con X, cioè:

$$\|X\| \quad = \quad \sqrt{X \cdot X} \quad = \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{13.3}$$

Esempio 2. Dall'Esempio 1, caso (c), $\|X_1\| = \sqrt{3}$.

Vedere i Problemi 1-2.

Usando le (13.1) e (13.3) si può dimostrare che

$$X \cdot Y \quad = \quad \tfrac{1}{2}\{\|X+Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2\} \tag{13.4}$$

Un vettore X la cui lunghezza sia $\|X\| = 1$ si dice vettore unità. I vettori elementari E_i sono esempi di vettori unità.

LA DISEGUAGLIANZA DI SCHWARZ. Se X ed Y sono vettori di $V_n(R)$, allora:

$$|X \cdot Y| \quad \leq \quad \|X\| \cdot \|Y\| \tag{13.5}$$

ovvero, il valore numerico del prodotto interno di due vettori reali è pari al massimo al prodotto delle loro lunghezze.

Vedere il Problema 3.

LA DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE. Se X ed Y sono dei vettori di $V_n(R)$, vale la:

$$\|X + Y\| \quad \leq \quad \|X\| + \|Y\| \tag{13.6}$$

VETTORI E SPAZI ORTOGONALI. Se $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sono $m \leq n$ vettori ad n dimensioni, non nulli e reciprocamente ortogonali, e se $c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_mX_m = 0$, allora per $i = 1,2,\ldots,m$, $(c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_mX_m) \cdot X_i = 0$. Richiedendo ciò che sia $c_i = 0$ per $i = 1,2,\ldots,m$, abbiamo:

I. Ogni insieme di $m \leq n$ vettori ad n dimensioni, non nulli e reciprocamente ortogonali, è un insieme linearmente indipendente e misura uno spazio vettoriale $V_n^m(R)$.

Un vettore Y si dice ortogonale ad uno spazio vettoriale $V_n^m(R)$ se è ortogonale a ciascun vettore di quello spazio.

II. Se un vettore Y è ortogonale a ciascuno dei vettori ad n dimensioni $X_1, X_2, \ldots, X_m$, esso è ortogonale allo spazio da essi misurato.

Vedere il Problema 4.

III. Se $V_n^h(R)$ è un subspazio di $V_n^k(R)$, essendo $k > h$, esiste almeno un vettore X di $V_n^k(R)$ ortogonale a $V_n^h(R)$.

Vedere il Problema 5.

Poiché dei vettori reciprocamente ortogonali sono linearmente indipendenti, uno spazio vettoriale $V_n^m(R)$, con $m > 0$, non può contenere più di m vettori mutuamente ortogonali. Supponiamo di aver trovato $r < m$ vettori fra loro ortogonali in $V_n^m(R)$. Essi misurano $V_n^r(R)$, subspazio di $V_n^m(R)$; e per il Teorema **III** esiste almeno un vettore di $V_n^m(R)$ ortogonale al $V_n^r(R)$. Abbiamo ora $r+1$ vettori fra loro ortogonali in $V_n^m(R)$, e ripetendo il ragionamento si dimostra:

IV. Ogni spazio vettoriale $V_n^m(R)$, con $m > 0$, contiene m e non più di m vettori reciprocamente ortogonali.

Due spazi vettoriali si dicono ortogonali se ogni vettore dell'uno è ortogonale ad ogni vettore dell'altro. Per esempio, lo spazio misurato da $X_1 = [1,0,0,1]'$ e $X_2 = [0,1,1,0]'$ è ortogonale allo spazio generato da $X_3 = [1,0,0,-1]'$ e $X_4 = [0,1,-1,0]'$, poiché $(aX_1 + bX_2) \cdot (cX_3 + dX_4) = 0$ per qualsiasi a, b, c, d.

V. L'insieme di tutti i vettori ortogonali a tutti quelli di un dato $V_n^k(R)$ è un unico spazio vettoriale $V_n^{n-k}(R)$.

Vedere il Problema 6.

Si può associare ad ogni vettore $X \neq 0$ un unico vettore unitario U che si ottiene dividendo per $\|X\|$ le componenti di X. Questa operazione si chiama normalizzazione. Così, per normalizzare il vettore $X = [2, 4, 4]'$, se ne divide ogni componente per $\|X\| = \sqrt{4+16+16} = 6$ ottenendo il vettore unità $[1/3, 2/3, 2/3]'$.

Una base di $V_n^m(R)$, consistente in vettori mutuamente ortogonali, viene detta una base ortogonale dello spazio; se i vettori stessi sono anche vettori unità, la base si definisce *ortogonale normale*, o *ortonormale*. I vettori elementari sono una base ortonormale di $V_n(R)$.

Vedere il Problema 7.

PROCEDIMENTO GRAM-SCHMIDT DI ORTOGONALIZZAZIONE. Supponiamo che $X_1, X_2, \ldots, X_m$ siano una base di $V_n^m(R)$. Definiamo

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_2 = X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

$$Y_3 = X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_m = X_m - \frac{Y_{m-1} \cdot X_m}{Y_{m-1} \cdot Y_{m-1}} Y_{m-1} - \cdots - \frac{Y_1 \cdot X_m}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

Allora i vettori unità $G_i = \dfrac{Y_i}{\|Y_i\|}$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sono mutuamente ortogonali, e sono una base ortonormale di $V_n^m(R)$.

Esempio 3. Costruire con il procedimento Gram-Schmidt una base ortogonale di $V_3(R)$, essendo data una base $X_1 = [1,1,1]'$, $X_2 = [1,-2,1]'$, $X_3 = [1,2,3]'$.

(i) $Y_1 = X_1 = [1,1,1]'$

(ii) $Y_2 = X_2 - \dfrac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = [1,-2,1]' - \dfrac{0}{3} Y_1 = [1,-2,1]'$

(iii) $Y_3 = X_3 - \dfrac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \dfrac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = [1,2,3]' - \dfrac{0}{6} Y_2 - \dfrac{6}{3}[1,1,1]' = [-1,0,1]'$

I vettori $G_1 = \dfrac{Y_1}{\|Y_1\|} = [1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]'$,

$G_2 = \dfrac{Y_2}{\|Y_2\|} = [1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]'$ e $G_3 = \dfrac{Y_3}{\|Y_3\|} = [-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}]'$

sono una base ortonormale di $V_3(R)$. Ogni vettore G_i è un vettore unità, ed ogni prodotto $G_i \cdot G_j = 0$. Si noti che qui è $Y_2 = X_2$, essendo X_1 e X_2 vettori ortogonali.

Vedere i Problemi 8-9.

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_m$ base di un $V_n^m(R)$, e supponiamo che $X_1, X_2, \ldots, X_s$, $(1 \le s < m)$ siano mutuamente ortogonali. Possiamo allora, con il procedimento Gram-Schmidt, ottenere una base ortogonale $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ dello spazio, in cui facilmente si dimostra $Y_i = X_i$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Così:

VI. Se $X_1, X_2, \ldots, X_s$, $(1 \le s < m)$, sono vettori unità mutuamente ortogonali di un $V_n^m(R)$, esistono in detto spazio altri vettori unità $X_{s+1}, X_{s+2}, \ldots, X_m$ tali che l'insieme $X_1, X_2, \ldots, X_m$ è una base ortonormale.

GRAMIANO. Sia $X_1, X_2, \ldots, X_p$ un insieme di vettori reali ad n dimensioni; definiamo la matrice Gramiana:

$$(13.8)\qquad G = \begin{bmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 & \ldots & X_1 \cdot X_p \\ X_2 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_2 & \ldots & X_2 \cdot X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_p \cdot X_1 & X_p \cdot X_2 & \ldots & X_p \cdot X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 & \ldots & X_1'X_p \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 & \ldots & X_2'X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_p'X_1 & X_p'X_2 & \ldots & X_p'X_p \end{bmatrix}.$$

E' chiaro che i vettori saranno mutuamente ortogonali solo ed esclusivamente se G è diagonale.

Nel Problema 14, cap. 17, dimostreremo:

VII. Per un insieme di vettori reali ad n dimensioni $X_1, X_2, \ldots, X_p$, $|G| \ge 0$. La eguaglianza sussiste solo ed esclusivamente se i vettori sono linearmente dipendenti.

MATRICI ORTOGONALI. Una matrice quadrata A si dice ortogonale se

$$(13.9)\qquad AA' = A'A = I$$

ovvero se

$$(13.9')\qquad A' = A^{-1}$$

Dalla **(13.9)** si vede che i vettori colonna (o i vettori riga) di una matrice ortogonale A sono vettori unità mutuamente ortogonali.

Esempio 4. Dall'Esempio 3, $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ è ortogonale.

Seguono immediatamente i teoremi:

VIII. Se la matrice quadrata di ordine n e reale A è ortogonale, i suoi vettori colonna (o vettori riga) sono una base ortonormale di $V_n(R)$, e viceversa.

IX. L'inversa e la trasposta di una matrice ortogonale sono ortogonali.

X. Il prodotto di due o più matrici ortogonali è ortogonale.

XI. Il determinante di una matrice ortogonale è ± 1.

TRASFORMAZIONI ORTOGONALI. Sia

$$(13.10)\qquad Y = AX$$

una trasformazione lineare in $V_n(R)$, e le immagini dei vettori ad n dimensioni X_1 e X_2 siano rappresentate rispettivamente da Y_1 e Y_2. Dalla (13.4) abbiamo:

$$X_1 \cdot X_2 = \tfrac{1}{2}\{\|X_1+X_2\|^2 - \|X_1\|^2 - \|X_2\|^2\}$$

e

$$Y_1 \cdot Y_2 = \tfrac{1}{2}\{\|Y_1+Y_2\|^2 - \|Y_1\|^2 - \|Y_2\|^2\}$$

Confrontando i membri di destra e di sinistra vediamo che se la (13.10) conserva le lunghezze, essa conserva i prodotti interni, e viceversa. Allora:

XII. Una trasformazione lineare conserva le lunghezze solo ed unicamente se conserva i prodotti interni.

Una trasformazione lineare $Y = AX$ si dice ortogonale se la sua matrice A è ortogonale. Nel Problema 10 si dimostra:

XIII. Una trasformazione lineare conserva le lunghezze solo ed unicamente se la sua matrice è ortogonale.

Esempio 5. La trasformazione lineare $Y = AX = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} X$ è ortogonale. L'immagine di $X = [a, b, c]'$ è

$$Y = \left[\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{6}} - \frac{c}{\sqrt{2}},\ \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{2b}{\sqrt{6}},\ \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{6}} + \frac{c}{\sqrt{2}}\right]$$

ed ambo i vettori hanno lunghezza $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

XIV. Se la (13.10) è una trasformazione di coordinate dalla base E ad un'altra base Z, la base Z è ortonormale solo ed unicamente se A è ortogonale.

PROBLEMI RISOLTI

1. Dati i vettori $X_1 = [1,2,3]'$ e $X_2 = [2,-3,4]'$, trovare: (*a*) il loro prodotto interno; (*b*) la lunghezza di ciascuno.

(*a*) $X_1 \cdot X_2 = X_1'X_2 = [1,2,3]\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1(2) + 2(-3) + 3(4) = 8$

(*b*) $\|X_1\|^2 = X_1 \cdot X_1 = X_1'X_1 = [1,2,3]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 14$ e $\|X_1\| = \sqrt{14}$

$\|X_2\|^2 = 2(2) + (-3)(-3) + 4(4) = 29$ e $\|X_2\| = \sqrt{29}$

2. (*a*) Dimostrare che $X = [1/3, -2/3, -2/3]'$ e $Y = [2/3, -1/3, 2/3]'$ sono ortogonali.
(*b*) Trovare un vettore Z ortogonale sia ad X che ad Y.

(*a*) $X \cdot Y = X'Y = [1/3, -2/3, -2/3]\begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 0$: i vettori sono ortogonali.

(*b*) Scrivere $[X, Y, 0] = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$ e calcolare i cofattori $-2/3, -2/3, 1/3$ degli elementi nella colonna degli zeri. Allora, per la (3.11), $Z = [-2/3, -2/3, 1/3]'$ è ortogonale sia ad X che ad Y.

3. Dimostrare la disuguaglianza di Schwarz: se X e Y sono vettori di $V_n(R)$, vale la $|X \cdot Y| \le \|X\| \cdot \|Y\|$.

Il teorema è chiaramente vero se X, o Y, è il vettore zero. Poniamo allora che X e Y siano vettori non nulli. Per a numero reale qualsiasi,

$$\begin{aligned} \|aX+Y\|^2 &= (aX+Y)\cdot(aX+Y) \\ &= [ax_1+y_1, ax_2+y_2, \ldots, ax_n+y_n]\cdot[ax_1+y_1, ax_2+y_2, \ldots, ax_n+y_n]' \\ &= (a^2x_1^2 + 2ax_1y_1 + y_1^2) + (a^2x_2^2 + 2ax_2y_2 + y_2^2) + \cdots + (a^2x_n^2 + 2ax_ny_n + y_n^2) \\ &= a^2\|X\|^2 + 2aX\cdot Y + \|Y\|^2 \ge 0 \end{aligned}$$

Ora, un polinomio di II grado in a è maggiore o uguale a zero per ogni valore reale di a solo ed esclusivamente se il suo discriminante è minore o uguale a zero. Così:

$$4(X\cdot Y)^2 - 4\|X\|^2 \cdot \|Y\|^2 \le 0$$

e

$$|X\cdot Y| \le \|X\| \cdot \|Y\|$$

4. Dimostrare che se un vettore Y è ortogonale a ciascuno dei vettori ad n dimensioni $X_1, X_2, \ldots, X_m$, esso è ortogonale allo spazio misurato da questi vettori.

Ogni vettore dello spazio misurato dagli X si può scrivere come $a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_mX_m$. Allora:

$$(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_mX_m)\cdot Y = a_1X_1\cdot Y + a_2X_2\cdot Y + \cdots + a_mX_m\cdot Y = 0$$

poiché $X_i \cdot Y = 0$, $(i = 1,2,\ldots,m)$. Dunque Y è ortogonale ad ogni vettore dello spazio: per definizione è ortogonale allo spazio stesso. In particolare, se Y è ortogonale a tutti i vettori di una base di spazio vettoriale, esso è ortogonale a quello spazio.

5. Dimostrare: se $V_n^h(R)$ è un sottospazio di un $V_n^k(R)$, con $k>h$, esiste almeno un vettore X di $V_n^k(R)$ ortogonale a $V_n^h(R)$.

Sia $X_1, X_2, \ldots, X_h$ una base del $V_n^h(R)$, essendo X_{h+1} un vettore di $V_n^k(R)$ ma non di $V_n^h(R)$; consideriamo il vettore

(i) $$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_hX_h + a_{h+1}X_{h+1}$$

La condizione che X sia ortogonale ad ognuno degli $X_1, X_2, \ldots, X_h$ si traduce in h equazioni lineari omogenee

$$a_1X_1\cdot X_1 + a_2X_2\cdot X_1 + \cdots + a_hX_h\cdot X_1 + a_{h+1}X_{h+1}\cdot X_1 = 0$$
$$a_1X_1\cdot X_2 + a_2X_2\cdot X_2 + \cdots + a_hX_h\cdot X_2 + a_{h+1}X_{h+1}\cdot X_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1X_1\cdot X_h + a_2X_2\cdot X_h + \cdots + a_hX_h\cdot X_h + a_{h+1}X_{h+1}\cdot X_h = 0$$

nelle $h+1$ incognite $a_1, a_2, \ldots, a_{h+1}$ Per il Teorema IV del cap. 10 esiste una soluzione non triviale. Sostituiti questi valori in (i), abbiamo un vettore X non nullo (perché?) ortogonale ai vettori base dello spazio $V_n^h(R)$, quindi allo spazio stesso.

6. Dimostrare che l'insieme di tutti i vettori *ortogonali* a ciascun vettore di un dato $V_n^k(R)$ è un unico spazio vettoriale $V_n^{n-k}(R)$.

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_k$ una base del $V_n^k(R)$. I vettori ad n dimensioni X ortogonali ad ognuno degli X_i soddisfano al sistema di equazioni omogenee

(i) $$X_1\cdot X = 0,\ X_2\cdot X = 0,\ \ldots,\ X_k\cdot X = 0$$

Poiché gli X_i sono linearmente indipendenti, la matrice dei coefficienti del sistema (i) è di rango k; vi sono quindi $n\text{-}k$ soluzioni (vettori) linearmente indipendenti che generano un $V_n^{n-k}(R)$. (Vedere Teorema VI, cap. 10).

L'unicità proviene dal fatto che lo spazio intersezione del $V_n^k(R)$ e del $V_n^{n-k}(R)$ è lo spazio zero, così che lo spazio somma è $V_n(R)$.

7. Trovare una base ortonormale di $V_3(R)$, dato $X = [1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]'$.

Si noti che X è un vettore unità. Scegliamo un altro vettore unità $Y = [1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}]'$ tale che $X\cdot Y = 0$. Allora, come nel Problema 2(*a*), otteniamo $Z = [1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]'$ per completare l'insieme.

8. Ricavare le equazioni Gram-Schmidt (13.7).

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_m$ una base assegnata di $V_n^m(R)$, e indichiamo con $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ l'insieme di vettori mutuamente ortogonali da trovare.

(*a*) Assumiamo $Y_1 = X_1$

(*b*) Prendiamo $Y_2 = X_2 + aY_1$ Poiché Y_1 e Y_2 debbono essere mutuamente ortogonali,

$$Y_1\cdot Y_2 = Y_1\cdot X_2 + Y_1\cdot aY_1 = Y_1\cdot X_2 + aY_1\cdot Y_1 = 0$$

ed è $a = -\dfrac{Y_1\cdot X_2}{Y_1\cdot Y_1}$. Allora, $Y_2 = X_2 - \dfrac{Y_1\cdot X_2}{Y_1\cdot Y_1}Y_1$.

(*c*) Prendiamo $Y_3 = X_3 + aY_2 + bY_1$. Dato che Y_1, Y_2, Y_3 han da essere mutuamente ortogonali,

$$Y_1\cdot Y_3 = Y_1\cdot X_3 + aY_1\cdot Y_2 + bY_1\cdot Y_1 = Y_1\cdot X_3 + bY_1\cdot Y_1 = 0$$

e

$$Y_2\cdot Y_3 = Y_2\cdot X_3 + aY_2\cdot Y_2 + bY_2\cdot Y_1 = Y_2\cdot X_3 + aY_2\cdot Y_2 = 0$$

Allora $a = -\dfrac{Y_2\cdot X_3}{Y_2\cdot Y_2}$, $b = -\dfrac{Y_1\cdot X_3}{Y_1\cdot Y_1}$, e $Y_3 = X_3 - \dfrac{Y_2\cdot X_3}{Y_2\cdot Y_2}Y_2 - \dfrac{Y_1\cdot X_3}{Y_1\cdot Y_1}Y_1$.

(*d*) Continuare il procedimento fino ad ottenere Y_m.

9. Costruire una base ortogonale di V_3, essendo data la base $X_1 = [2,1,3]'$, $X_2 = [1,2,3]'$, e $X_3 = [1,1,1]'$.

Prendere $Y_1 = X_1 = [2,1,3]'$. Allora

$$Y_2 = X_2 - \frac{Y_1\cdot X_2}{Y_1\cdot Y_1}Y_1 = [1,2,3]' - \frac{13}{14}[2,1,3]' = [-6/7, 15/14, 3/14]'$$

$$Y_3 = X_3 - \frac{Y_2\cdot X_3}{Y_2\cdot Y_2}Y_2 - \frac{Y_1\cdot X_3}{Y_1\cdot Y_1}Y_1$$

$$= [1,1,1]' - \frac{2}{9}\left[-\frac{6}{7}, \frac{15}{14}, \frac{3}{14}\right]' - \frac{3}{7}[2,1,3]' = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right]'$$

Normalizzando le Y abbiamo $[2/\sqrt{14}, 1/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14}]'$, $[-4/\sqrt{42}, 5/\sqrt{42}, 1/\sqrt{42}]'$, $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]'$, base ortonormale come quella richiesta.

10. Dimostrare che una trasformazione lineare conserva le lunghezze solo ed esclusivamente se la sua matrice è ortogonale.

Siano Y_1, Y_2 le immagini rispettive di X_1, X_2 sotto la trasformazione lineare $Y = AX$.

Supponiamo ortogonale A, così che $A'A = I$. Allora:

(i) $$Y_1\cdot Y_2 = Y_1'Y_2 = (X_1'A')(AX_2) = X_1'X_2 = X_1\cdot X_2$$

e, per il Teorema XII, le lunghezze sono conservate.

Con procedimento inverso, poniamo che le lunghezze (ed anche i prodotti interni) siano conservati. Allora:

$$Y_1\cdot Y_2 = X_1'(A'A)X_2 = X_1'X_2, \qquad A'A = I$$

ed A è ortogonale.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

11. Dati i vettori $X_1 = [1,2,1]'$, $X_2 = [2,1,2]'$, $X_3 = [2,1,-4]'$, trovare:

(*a*) il prodotto interno di ciascuna coppia,

(*b*) la lunghezza di ciascun vettore,

(*c*) un vettore ortogonale a X_1, X_2; X_1, X_3.

Risp. (*a*) 6, 0, −3 (*b*) $\sqrt{6}$, 3, $\sqrt{21}$ (*c*) $[1,0,-1]'$, $[3,-2,1]'$

12. Usando vettori arbitrari di $V_3(R)$, verificare la (13.2).

13. Dimostrare la (13.4).

14. Siano $X = [1,2,3,4]'$ e $Y = [2,1,-1,1]'$ base di uno spazio $V_4^2(R)$, e $Z = [4,2,3,1]'$ appartenga ad un $V_4^3(R)$ che contiene X e Y.

(*a*) Dimostrare che Z non si trova in $V_4^2(R)$.

(*b*) Scrivere $W = aX + bY + cZ$ e trovare un vettore W del $V_4^3(R)$ ortogonale sia ad X che a Y.

15. (*a*) Dimostrare: Un vettore di $V_n(R)$ è ortogonale a se stesso solo ed esclusivamente se è il vettore zero.

(*b*) Dimostrare: Se X_1, X_2, X_3 sono un insieme di vettori ad n dimensioni, non nulli, linearmente dipendenti, e se $X_1\cdot X_2 = X_1\cdot X_3 = 0$, X_2 e X_3 sono linearmente dipendenti.

16. Dimostrare che un vettore X è ortogonale ad ogni vettore di uno spazio $V_n^m(R)$ solo ed unicamente se esso è ortogonale a ciascun vettore di una base di detto spazio.

17. Dimostrare che se due spazi $V_n^h(R)$ e $V_n^k(R)$ sono ortogonali, la loro intersezione è $V_n^o(R)$.

18. Dimostrare la diseguaglianza triangolare.
Traccia: Dimostrare che $\|X+Y\|^2 \leq (\|X\| + \|Y\|)^2$, usando la diseguaglianza di Schwarz.

19. Dimostrare: $\|X+Y\| = \|X\| + \|Y\|$ solo ed unicamente se X ed Y sono linearmente dipendenti.

20. Normalizzare i vettori del Problema 11.
Risp. $[1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6},\ 1/\sqrt{6}]'$, $[2/3,\ 1/3,\ 2/3]'$, $[2/\sqrt{21},\ 1/\sqrt{21},\ -4/\sqrt{21}]'$

21. Dimostrare che i vettori X, Y, Z del Problema 2 sono una base ortonormale di $V_3(R)$.

22. (*a*) Dimostrare che se $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sono linearmente indipendenti, tali ugualmente sono i vettori unità ottenuti normalizzando i primi.
(*b*) Dimostrare che se i vettori di (*a*) sono dei vettori non nulli mutuamente ortogonali, tali sono anche i vettori unità che si ottengono normalizzandoli.

23. Dimostrare: (*a*) Se A è ortogonale ed $|A| = 1$, ogni elemento di A è uguale al proprio cofattore in $|A|$.
(*b*) Se A è ortogonale e $|A| = -1$, ogni elemento di A è uguale al negativo del proprio cofattore in $|A|$.

24. Dimostrare i Teoremi **VIII**, **IX**, **X**, **XI**.

25. Dimostrare: Se A e B commutano e C è ortogonale, $C'AC$ e $C'BC$ commutano.

26. Dimostrare che AA' (o $A'A$), con A quadrata di ordine n, è una matrice diagonale solo ed esclusivamente se le righe (o le colonne) di A sono ortogonali.

27. Dimostrare: Se X ed Y sono vettori ad n dimensioni, sussiste simmetria per $XY' + YX'$.

28. Dimostrare: Se X ed Y sono vettori ad n dimensioni e A è quadrata di ordine n, allora $X \cdot (AY) = (A'X) \cdot Y$.

29. Dimostrare: Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono una base ortonormale, e se $X = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$, allora:
(*a*) $X \cdot X_i = c_i$, $(i = 1,2,\ldots,n)$; (*b*) $X \cdot X = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2$.

30. Trovare una base ortonormale di $V_3(R)$, dati: (*a*) $X_1 = [3/\sqrt{17},\ -2/\sqrt{17},\ 2/\sqrt{17}]'$; (*b*) $[3,0,2]'$
Risp. (*a*) X_1, $[0,\ 1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}]'$, $[-4/\sqrt{34},\ -3/\sqrt{34},\ 3/\sqrt{34}]'$
(*b*) $[3/\sqrt{13},\ 0,\ 2/\sqrt{13}]'$, $[2/\sqrt{13},\ 0,\ -3/\sqrt{13}]'$, $[0,1,0]'$

31. Costruire delle basi ortonormali di $V_3(R)$ con il procedimento Gram-Schmidt, usando nell'ordine i vettori seguenti:
(*a*) $[1,-1,0]'$, $[2,-1,-2]'$, $[1,-1,-2]'$
(*b*) $[1,0,1]'$, $[1,3,1]'$, $[3,2,1]'$
(*c*) $[2,-1,0]'$, $[4,-1,0]'$, $[4,0,-1]'$
Risp. (*a*) $[\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ 0]'$, $[\sqrt{2}/6,\ \sqrt{2}/6,\ -2\sqrt{2}/3]'$, $[-2/3,\ -2/3,\ -1/3]'$
(*b*) $[\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ 0,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}]'$, $[0,1,0]'$, $[\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ 0,\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}]'$
(*c*) $[2\sqrt{5}/5,\ -\sqrt{5}/5,\ 0]'$, $[\sqrt{5}/5,\ 2\sqrt{5}/5,\ 0]'$, $[0,0,-1]'$

32. Ricavare una base ortonormale di $V_3(R)$, dati $X_1 = [1,1,-1]'$ e $X_2 = [2,1,0]'$.
Traccia: Assumere $Y_1 = X_1$, ottenere Y_2 con il procedimento Gram-Schmidt, e Y_3 con il metodo del Problema 2(*b*).
Risp. $[\sqrt{3}/3,\ \sqrt{3}/3,\ -\sqrt{3}/3]'$, $[\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ 0,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}]'$, $[\sqrt{6}/6,\ -\sqrt{6}/3,\ -\sqrt{6}/6]'$

33. Trovare una base ortonormale di $V_3(R)$, dato $X_1 = [7,-1,-1]'$.

34. Dimostrare in due modi che i vettori $[1,2,3,4]'$, $[1,-1,-2,-3]'$, e $[5,4,5,6]'$ sono linearmente dipendenti.

35. Dimostrare: Se A è emisimmetrica e $I+A$ è non singolare, $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ è ortogonale.

36. Trovare come nel Problema 35 la matrice ortogonale B, essendo date:

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \qquad (b)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Risp. $(a)\ \dfrac{1}{13}\begin{bmatrix} -12 & -5 \\ 5 & -12 \end{bmatrix}$ $\qquad (b)\ \dfrac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & -14 & 2 \\ -10 & -5 & -10 \\ 10 & 2 & -11 \end{bmatrix}$

37. Dimostrare: Se A è una matrice ortogonale e se $B = AP$, con P non singolare, allora PB^{-1} è ortogonale.

38. In una trasformazione di coordinate dalla base E ad una base ortonormale Z con matrice P, $Y = AX$ diventa $Y_1 = P^{-1}APX_1$ o $Y_1 = BX_1$ (v. cap. 12). Dimostrare che se A è ortogonale così è anche B, e viceversa, dimostrando così il Teorema **XIV**.

39. Dimostrare: Se A è ortogonale ed $I+A$ è non singolare, $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ è emisimmetrica.

40. Siano $X = [x_1, x_2, x_3]'$ e $Y = [y_1, y_2, y_3]'$ due vettori di $V_3(R)$; definiamo il prodotto vettore $X \times Y$ di X e Y come $Z = X \times Y = [z_1, z_2, z_3]'$, in cui $z_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$, $z_2 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$, $z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ Avendo identificato le z_i come cofattori degli elementi della terza colonna di $[X_1, Y_1, 0]$, stabiliamo:
(*a*) Il prodotto vettore di due vettori linearmente dipendenti è il vettore zero.
(*b*) Il prodotto vettore di due vettori linearmente indipendenti è ortogonale ad ognuno dei due.
(*c*) $X \times Y = -(Y \times X)$.
(*d*) $(kX) \times Y = k(X \times Y) = X \times (kY)$, essendo k uno scalare.

41. Se W, X, Y, Z sono quattro vettori di $V_3(R)$, stabiliamo:

$(a)\ X \times (Y+Z) = X \times Y + X \times Z$

$(b)\ X \cdot (Y \times Z) = Y \cdot (Z \times X) = Z \cdot (X \times Y) = |XYZ|$

$(c)\ (W \times X) \cdot (Y \times Z) = \begin{vmatrix} W \cdot Y & W \cdot Z \\ X \cdot Y & X \cdot Z \end{vmatrix}$

$(d)\ (X \times Y) \cdot (X \times Y) = \begin{vmatrix} X \cdot X & X \cdot Y \\ Y \cdot X & Y \cdot Y \end{vmatrix}$

CAPITOLO 14

Vettori nel campo complesso

NUMERI COMPLESSI. Per x ed y numeri reali, ed i definita con la relazione $i^2 = -1$, $z = x + iy$ si dice numero complesso. Il numero reale x si chiama parte reale e il numero reale y parte immaginaria di $x + iy$.

Due numeri complessi sono uguali solo ed esclusivamente se parte reale e parte immaginaria dell'uno sono uguali alle corrispondenti parti dell'altro.

Un numero complesso $x + iy = 0$ solo ed esclusivamente se $x = y = 0$.

Il coniugato del numero complesso $z = x + iy$ è dato da $\bar{z} = \overline{x+iy} = x - iy$. La somma (o il prodotto) di qualsiasi numero complesso con il suo coniugato è un numero reale.

Il valore assoluto $|z|$ del numero complesso $z = x + iy$ è dato da $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Segue immediatamente che per ogni numero complesso $z = x + iy$,

$$|z| \geq |x| \quad \text{e} \quad |z| \geq |y| \tag{14.1}$$

VETTORI. Sia X un vettore ad n dimensioni nel campo complesso C. La totalità di tali vettori costituisce lo spazio vettoriale $V_n(C)$. Poiché $V_n(R)$ ne è un sottocampo, ci si deve aspettare che ogni teorema riguardante dei vettori di $V_n(C)$ si ridurrà ad un teorema del cap. 13 quando si considerino soltanto dei vettori reali.

Se $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ e $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$ sono due vettori di $V_n(C)$, il loro prodotto interno si definisce come:

$$X \cdot Y = \bar{X}'Y = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \cdots + \bar{x}_n y_n \tag{14.2}$$

Sono subito verificate le seguenti regole sui prodotti interni:

(14.3)

(a) $X \cdot Y = \overline{Y \cdot X}$

(b) $(cX) \cdot Y = \bar{c}(X \cdot Y)$

(c) $X \cdot (cY) = c(X \cdot Y)$

(d) $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$

(e) $(Y + Z) \cdot X = Y \cdot X + Z \cdot X$

(f) $X \cdot Y + Y \cdot X = 2R(X \cdot Y)$ in cui $R(X \cdot Y)$ è la parte reale di $X \cdot Y$.

(g) $X \cdot Y - Y \cdot X = 2C(X \cdot Y)$ in cui $C(X \cdot Y)$ è la parte immaginaria di $X \cdot Y$.

Vedere il Problema 1.

La lunghezza di un vettore X è data da $\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n}$.

Due vettori X e Y sono ortogonali se $X \cdot Y = Y \cdot X = 0$.

Per vettori di $V_n(C)$ sussistono diseguaglianza triangolare

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \tag{14.4}$$

e diseguaglianza di Schwarz (vedere il Problema 2)

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\| \tag{14.5}$$

Abbiamo inoltre (vedere i Teoremi I-IV, cap. 13).

I. Ogni insieme su C di m vettori ad n dimensioni, non nulli, mutuamente ortogonali, è linearmente indipendente e quindi misura (genera) uno spazio vettoriale $V_n^m(C)$.

II. Se un vettore Y è ortogonale a ciascuno dei vettori ad n dimensioni $X_1, X_2, \ldots, X_m$, esso è ortogonale allo spazio misurato da questi vettori.

III. Se $V_n^h(C)$ è un sottospazio di $V_n^k(C)$, con $k > h$, esiste almeno un vettore X in $V_n^k(C)$ che sia ortogonale a $V_n^h(C)$.

IV. Ogni spazio vettoriale $V_n^m(C)$, con $m > 0$, contiene m, e non più di m, vettori mutuamente ortogonali.

Una base di $V_n^m(C)$ consistente in vettori mutuamente ortogonali si dice base ortogonale. Se i vettori mutuamente ortogonali sono anche vettori unità, la base si chiama normale, o anche ortonormale.

PROCEDIMENTO GRAM-SCHMIDT. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_m$ una base di $V_n^m(C)$. Definiamo:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= X_1 \\
Y_2 &= X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 \\
Y_3 &= X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_m &= X_m - \frac{Y_{m-1} \cdot X_m}{Y_{m-1} \cdot Y_{m-1}} Y_{m-1} - \cdots - \frac{Y_1 \cdot X_m}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1
\end{aligned} \tag{14.6}$$

I vettori unità $G_i = \dfrac{Y_i}{\|Y_i\|}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sono una base ortonormale di $V_n^m(C)$.

V. Se $X_1, X_2, \ldots, X_s$, $(1 \leq s < m)$ sono dei vettori unità di $V_n^m(C)$, mutuamente ortogonali, esistono in detto spazio dei vettori unità (ottenuti con il procedimento Gram-Schmidt) $X_{s+1}, X_{s+2}, \ldots, X_m$ tali che l'insieme $X_1, X_2, \ldots, X_m$ è una base ortonormale.

GRAMIANO. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_p$ un insieme di vettori ad n dimensioni ed elementi complessi; definiamo la matrice Gramiana:

$$G = \begin{bmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 & \cdots & X_1 \cdot X_p \\ X_2 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_2 & \cdots & X_2 \cdot X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_p \cdot X_1 & X_p \cdot X_2 & \cdots & X_p \cdot X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1' X_1 & \bar{X}_1' X_2 & \cdots & \bar{X}_1' X_p \\ \bar{X}_2' X_1 & \bar{X}_2' X_2 & \cdots & \bar{X}_2' X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{X}_p' X_1 & \bar{X}_p' X_2 & \cdots & \bar{X}_p' X_p \end{bmatrix} \tag{14.7}$$

E' evidente che i vettori sono reciprocamente ortogonali solo ed unicamente se G è diagonale.

Con il Problema 14, cap. 17, possiamo dimostrare:

VI. Per un insieme di vettori $X_1, X_2, \ldots, X_p$ ad n dimensioni ed elementi complessi, è $|G| \geq 0$. L'eguaglianza sussiste solo ed esclusivamente se i vettori sono linearmente dipendenti.

MATRICI UNITARIE. Una matrice quadrata A di ordine n si dice *unitaria* se $(\bar{A})'A = A(\bar{A})' = I$, cioè se $(\bar{A})' = A^{-1}$. I vettori colonna (o vettori riga) di una matrice unitaria sono vettori unità mutuamente ortogonali.

Confrontando i teoremi sulle matrici ortogonali del cap. 13, abbiamo:

VII. I vettori colonna (o vettori riga) di una matrice unitaria quadrata di ordine n costituiscono una base ortonormale di $V_n(C)$, e viceversa.

VIII. L'inversa e la trasposta di una matrice unitaria sono unitarie.

IX. Il prodotto di due o più matrici unitarie è unitario.

X. Il determinante di una matrice unitaria ha valore assoluto 1.

TRASFORMAZIONI UNITARIE. La trasformazione lineare

$$Y = AX \tag{14.8}$$

con A unitaria, è una trasformazione unitaria.

XI. Una trasformazione lineare conserva le lunghezze (e quindi i prodotti interni) solo ed unicamente se la sua matrice è unitaria.

XII. Se $Y = AX$ è una trasformazione di coordinate dalla base E ad un'altra base Z, la base Z è ortonormale solo ed esclusivamente se A è unitaria.

PROBLEMI RISOLTI

1. Dati $X = [1+i, -i, 1]'$ e $Y = [2+3i, 1-2i, i]'$,

(*a*) trovare $X \cdot Y$ e $Y \cdot X$ (*c*) verificare $X \cdot Y + Y \cdot X = 2R(X \cdot Y)$

(*b*) verificare $X \cdot Y = \overline{Y \cdot X}$ (*d*) verificare $X \cdot Y - Y \cdot X = 2C(X \cdot Y)$

(*a*) $$X \cdot Y = \bar{X}'Y = [1-i, i, 1]\begin{bmatrix} 2+3i \\ 1-2i \\ i \end{bmatrix} = (1-i)(2+3i) + i(1-2i) + 1(i) = 7+3i$$

$$Y \cdot X = \bar{Y}'X = [2-3i, 1+2i, -i]\begin{bmatrix} 1+i \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} = 7-3i$$

(*b*) Dalla (*a*): $\overline{Y \cdot X}$, coniugato di $Y \cdot X$, è $7+3i = X \cdot Y$.

(*c*) $X \cdot Y + Y \cdot X = (7+3i) + (7-3i) = 14 = 2(7) = 2R(X \cdot Y)$

(*d*) $X \cdot Y - Y \cdot X = (7+3i) - (7-3i) = 6i = 2(3i) = 2C(X \cdot Y)$

2. Dimostrare la diseguaglianza di Schwarz: $|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$.

Come nel caso dei vettori reali, la diseguaglianza è vera se $X = 0$ o $Y = 0$. Quando X e Y sono vettori non nulli, ed a è reale, allora:

$$\|aX+Y\|^2 = (aX+Y)\cdot(aX+Y) = a^2 X \cdot X + a(X \cdot Y + Y \cdot X) + Y \cdot Y = a^2\|X\|^2 + 2aR(X \cdot Y) + \|Y\|^2 \geq 0.$$

Dato che la funzione di secondo grado in a è non negativa solo ed esclusivamente se il suo discriminante è non positivo, avremo:

$$R(X \cdot Y)^2 - \|X\|^2\|Y\|^2 \leq 0 \quad \text{e} \quad R(X \cdot Y) \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

Se $X \cdot Y = 0$, $|X \cdot Y| = R(X \cdot Y) \leq \|X\| \cdot \|Y\|$. Se $X \cdot Y \neq 0$, definiamo $c = \dfrac{X \cdot Y}{|X \cdot Y|}$.

Allora $R(cX \cdot Y) \leq \|cX\| \cdot \|Y\| = |c|\,\|X\| \cdot \|Y\| = \|X\| \cdot \|Y\|$ mentre, per la **(14.3(*b*))**, $R(cX \cdot Y) = R[\bar{c}(X \cdot Y)] = |X \cdot Y|$. Così $|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$ per tutti gli X ed Y.

3. Dimostrare che $B = (\bar{A})'A$ è Hermitiana per ogni matrice quadrata A.

$(\bar{B})' = \{\overline{(\bar{A})'A}\}' = (\bar{A}'\bar{\bar{A}})' = (\bar{A})'A = B$, e B è Hermitiana.

4. Se $A = B + iC$ è Hermitiana, dimostrare che $(\bar{A})'A$ è reale solo ed esclusivamente se B e C anti-commutano.

Poiché la $B+iC$ è Hermitiana, $(\overline{B+iC})' = B+iC$; così,

$$(\bar{A})'A = (\overline{B+iC})'(B+iC) = (B+iC)(B+iC) = B^2 + i(BC+CB) - C^2$$

che è reale solo ed unicamente se $BC + CB = 0$ o $BC = -CB$; quindi, solo ed esclusivamente se B e C anticommutano.

5. Dimostrare che se A è anti-Hermitiana, $\pm iA$ è Hermitiana.

Consideriamo $B = -iA$. Poiché A è anti-Hermitiana, $(\bar{A})' = -A$. Allora

$$(\bar{B})' = (\overline{-iA})' = i(\bar{A})' = i(-A) = -iA = B$$

e B è Hermitiana. Il lettore esamini il caso $B = iA$.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

6. Dati i vettori $X_1 = [i, 2i, 1]'$, $X_2 = [1, 1+i, 0]'$ e $X_3 = [i, 1-i, 2]'$.

(*a*) trovare $X_1 \cdot X_2$ e $X_2 \cdot X_3$.

(*b*) trovare la lunghezza di ciascun vettore X_i.

(*c*) dimostrare che $[1-i, -1, 1-i]'$ è ortogonale sia a X_1 che a X_2.

(*d*) trovare un vettore ortogonale sia a X_1 che a X_3.

Risp. (*a*) $2-3i, -i$ (*b*) $\sqrt{6}, \sqrt{3}, \sqrt{7}$ (*d*) $[-1-5i, i, 3-i]$

7. Dimostrare che $[1+i, i, 1]'$, $[i, 1-i, 0]'$ e $[1-i, 1, 3i]'$ sono sia linearmente indipendenti che mutuamente ortogonali.

8. Dimostrare le relazioni **(14.3)**.

9. Dimostrare la diseguaglianza triangolare.

10. Dimostrare i Teoremi **I-IV**.

11. Ricavare le relazioni **(14.6)**.

12. Tramite le **(14.6)**, e con i vettori dati in ordine, costruire una base ortonormale per $V_3(C)$ essendo i vettori:

(*a*) $[0,1,-1]',\ [1+i,1,1]',\ [1-i,1,1]'$

(*b*) $[1+i,i,1]',\ [2,1-2i,2+i]',\ [1-i,0,-i]'$.

Risp. (*a*) $[0,\tfrac{1}{2}\sqrt{2},-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}]',\ [\tfrac{1}{2}(1+i),\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]',\ [-\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i),\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)]'$

(*b*) $[\tfrac{1}{2}(1+i),\tfrac{1}{2}i,\tfrac{1}{2}]',\ [\frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{1-5i}{4\sqrt{3}},\ \frac{3+3i}{4\sqrt{3}}]',\ [\frac{7-i}{2\sqrt{30}},\ \frac{-5}{2\sqrt{30}},\ \frac{-6+3i}{2\sqrt{30}}]'$

13. Dimostrare che se A è una matrice sul campo complesso, $A+\overline{A}$ ha solo elementi reali, mentre $A-\overline{A}$ ha solo elementi immaginari puri.

14. Dimostrare il Teorema V.

15. Se A è quadrata di ordine n, dimostrare:

(*a*) $\overline{A}'A$ è diagonale solo ed unicamente se le colonne di A sono dei vettori mutuamente ortogonali.

(*b*) $\overline{A}'A = I$ solo ed unicamente se le colonne di A sono dei vettori unità mutuamente ortogonali.

16. Dimostrare che se X e Y sono vettori ad n dimensioni e A è quadrata di ordine n, vale la: $X\cdot AY = \overline{A}'X\cdot Y$.

17. Dimostrare i Teoremi VII-X.

18. Dimostrare: Se A è anti-Hermitiana, così che $I+A$ sia non singolare, allora $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ è unitaria.

19. Formare una matrice unitaria come visto nel Problema 18, essendo dati:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & i \end{bmatrix},\quad (b)\ \begin{bmatrix} 0 & i & 1+i \\ i & 0 & i \\ -1+i & i & 0 \end{bmatrix}.$$

Risp. $(a)\ \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1+2i & -4-2i \\ 2-4i & -2-i \end{bmatrix},\quad (b)\ \frac{1}{29}\begin{bmatrix} -9+8i & -10-4i & -16-18i \\ -2-24i & 1+12i & -10-4i \\ 4-10i & -2-24i & -9+8i \end{bmatrix}$

20. Dimostrare che se A e B sono unitarie e dello stesso ordine, AB e BA sono unitarie.

21. Con la dimostrazione del Problema 10, cap. 13, provare il Teorema XI.

22. Dimostrare che se A è unitaria ed Hermitiana, essa è involutoria.

23. Dimostrare che la $\begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}(1+i) & i/\sqrt{3} & \frac{3+i}{2\sqrt{15}} \\ -\tfrac{1}{2} & 1/\sqrt{3} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} \\ \tfrac{1}{2} & -i/\sqrt{3} & \frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{bmatrix}$ è unitaria.

24. Dimostrare che se A è unitaria, e $B = AP$ con P non singolare, allora la PB^{-1} è unitaria.

25. Dimostrare: Se A è unitaria, e $I+A$ è non singolare, la $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ è anti-Hermitiana.

CAPITOLO 15

Congruenza

MATRICI CONGRUENTI. Due matrici A e B quadrate di ordine n si dicono congruenti, $\overset{C}{\sim}$, su F se esiste su F una matrice non singolare P tale che

$$B = P'AP \tag{15.1}$$

Evidentemente la congruenza è una caso particolare di equivalenza: matrici congruenti hanno lo stesso rango.

Quando P viene espressa come prodotto di matrici colonna elementari, P' è il prodotto in ordine inverso delle stesse matrici riga elementari; ovvero, A e B sono congruenti purché A possa ridursi a B con una sequenza a coppie di trasformazioni elementari, consistendo ogni coppia di una trasformazione elementare di riga, seguita dalla stessa trasformazione elementare di colonna.

MATRICI SIMMETRICHE. Nel Problema 1 dimostriamo:

I. Ogni matrice simmetrica A sopra F, di rango r, è congruente su F con una matrice diagonale che ha non nulli i primi r elementi diagonali, mentre tutti gli altri elementi sono zero.

Esempio 1. Trovare una matrice non singolare P con elementi razionali, tale che $D = P'AP$ sia diagonale, essendo data:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix}$$

Per ridurre A a D usiamo la $[A\ I]$ e calcoliamo intanto la matrice P'. Useremo la prima la $H_{21}(-2)$ e $K_{21}(-2)$, poi $H_{31}(-3)$ e $K_{31}(-3)$, infine la $H_{41}(-2)$ e $K_{41}(-2)$ per ottenere zeri nella prima riga e nella prima colonna. Comunque si risparmia parecchio tempo se si fanno prima le tre trasformazioni di riga, e poi le tre trasformazioni di colonna. Se A non risulta trasformata in una matrice simmetrica è stato commesso un errore. Abbiamo:

$$[A\ H] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -12 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -10 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$= [D\ P']$$

Allora: $$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice D, in cui A è stata ridotta, non è unica. Le trasformazioni aggiuntive $H_3(\frac{1}{2})$ e $K_3(\frac{1}{2})$, per esempio sostituiscono a D la matrice diagonale $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, mentre le trasformazioni $H_2(3)$ e $K_2(3)$ sostituiscono D con $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Non esiste ad ogni modo alcuna coppia di trasformazioni razionali o reali che sostituiscano D con una matrice diagonale avente solo elementi non negativi nella diagonale.

MATRICI SIMMETRICHE REALI. La matrice simmetrica reale A venga ridotta, con trasformazioni elementari reali, ad una matrice diagonale congruente D; ovvero, sia $P'AP = D$. Mentre gli elementi diagonali non nulli di D dipendono sia da A che da P, si dimostrerà nel cap. 17 che il numero di elementi diagonali non nulli positivi dipende soltanto da A.

Con una sequenza di trasformazioni di tipo 1 su riga e sulla colonna corrispondente, gli elementi diagonali di D possono essere risistemati in modo che gli elementi positivi precedano quelli negativi. Allora si può usare una sequenza di trasformazioni di tipo 2 su righe e colonne corrispondenti (reali) per ridurre la matrice diagonale ad una in cui gli elementi diagonali non nulli siano $+1$ o -1.

Abbiamo:

II. Una matrice simmetrica reale di rango r è congruente sul campo reale con una matrice canonica

$$C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (15.2)$$

L'intero p della **(15.2)** si chiama indice della matrice, e $s = p-(r-p)$ si chiama sigla.

Esempio 2. Applicando le trasformazioni H_{23}, K_{23} e $H_2(\frac{1}{2}), K_2(\frac{1}{2})$ al risultato dell'Esempio 1, abbiamo

$$[A \mid I] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] = [C \mid Q']$$

e $Q'AQ = C$. Così A è di rango $r = 3$, indice $p = 2$, sigla $s = 1$.

III. Due matrici simmetriche reali, quadrate di ordine n, sono congruenti sul campo reale solo ed esclusivamente se hanno lo stesso rango e lo stesso indice, o lo stesso rango e la stessa sigla.

Nel campo reale, l'insieme di tutte le matrici quadrate di ordine n del tipo **(15.2)** è un insieme canonico su congruenza per matrici simmetriche, quadrate di ordine n, reali.

NEL CAMPO COMPLESSO si ha:

IV. Ogni matrice simmetrica, complessa, quadrata di ordine n e rango r è congruente sul campo dei numeri complessi con una matrice canonica

$$C = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (15.3)$$

Esempio 3. Applicando le trasformazioni $H_3(i)$ e $K_3(i)$ al risultato dell'Esempio 2 abbiamo:

$$[A \mid I] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] = [D \mid R']$$

e $R'AR = D = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Vedere i Problemi 2-3.

V. Due matrici simmetriche, complesse, quadrate di ordine n, sono congruenti sul campo dei numeri complessi solo ed esclusivamente se hanno lo stesso rango.

MATRICI EMISIMMETRICHE. Se A è emisimmetrica, allora è

$$(P'AP)' = P'A'P = P'(-A)P = -P'AP$$

Quindi:

VI. Ogni matrice $B = P'AP$ congruente ad una matrice emisimmetrica A è anch'essa emisimmetrica.

Nel Problema 4 si dimostra:

VII. Ogni matrice emisimmetrica A, quadrata di ordine n su F, è congruente su F con una matrice canonica

$$B = \text{diag}(D_1, D_2, \ldots, D_t, 0, \ldots, 0) \qquad (15.4)$$

in cui $D_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $(i = 1, 2, \ldots, t)$. Il rango di A è $r = 2t$.

Vedere il Problema 5.

Segue ancora:

VIII. Due matrici emisimmetrice, quadrate di ordine n su F, sono congruenti su F solo ed esclusivamente se hanno lo stesso rango.

L'insieme delle matrici del tipo **(15.4)** è un insieme canonico su congruenza per matrici emisimmetriche, quadrate di ordine n.

MATRICI HERMITIANE. Due matrici Hermitiane A e B, quadrate di ordine n, si dicono congruenti con Hermite, $[\overset{HC}{\sim}]$, ovvero congiuntive, se esiste una matrice P non singolare tale che

$$B = \bar{P}'AP \qquad (15.5)$$

Allora:

e $$P = \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & -2 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Per ottenere la **(15.3)** abbiamo:

$$[D \mid P_1'] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2i & -i & 0 \end{array}\right] = [C \mid P']$$

e $$P = \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & 2i \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -i \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

3. Trovare una matrice P non singolare, tale che $P'AP$ sia nella forma canonica **(15.3)**, essendo data

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ i & 0 & 2-i \\ 1+i & 2-i & 10+2i \end{bmatrix}$$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 2-i & 0 & 1 & 0 \\ 1+i & 2-i & 10+2i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3-2i & -i & 1 & 0 \\ 0 & 3-2i & 10 & -1-i & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5+12i & 1+2i & -3+2i & 1 \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7+4i}{13} & \frac{-5+12i}{13} & \frac{3-2i}{13} \end{array}\right]$$

$$= [C \mid P']$$

Avremo allora $$P = \begin{bmatrix} 1 & -i & \frac{7+4i}{13} \\ 0 & 1 & \frac{-5+12i}{13} \\ 0 & 0 & \frac{3-2i}{13} \end{bmatrix}$$

4. Dimostrare che ogni matrice emisimmetrica A, quadrata di ordine n su F, di rango $2t$ è congruente su F con una matrice

$$B = \text{diag}(D_1, D_2, \ldots, D_t, 0, \ldots, 0)$$

in cui $D_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $(i = 1, 2, \ldots, t)$.

Se $A = 0$, allora $B = A$. Se $A \neq 0$, allora qualche elemento risulterà $a_{ij} = -a_{ji} \neq 0$. Scambiare le i-me e prime righe con le j-me e seconde righe; scambiare poi le i-me e prime colonne con le j-me e seconde colonne, sostituendo A con la matrice emisimmetrica $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & a_{ij} & E_2 \\ -a_{ij} & 0 & \\ \hline E_3 & & E_4 \end{array}\right]$ Moltiplicare poi la prima riga e la prima colonna per $1/a_{ij}$ ottenendo $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & F_2 \\ -1 & 0 & \\ \hline F_3 & & E_4 \end{array}\right]$ e da questo, con trasformazioni elementari di

tipo 3 su riga e colonna, otteniamo:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \\ \hline 0 & & F_4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & F_4 \end{bmatrix}$$

Se $F_4 = 0$, la riduzione è completa; altrimenti il procedimento va ripetuto su $F_4, \ldots$, finché non si ottiene B.

5. Trovare una matrice P non singolare tale che $P'AP$ sia nella forma canonica **(15.4)**, essendo data:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ -4 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando la $a_{13} \neq 0$, dobbiamo soltanto scambiare la terza e seconda riga, nonché la terza e seconda colonna di $\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ per ottenere $\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Moltiplichiamo poi per ½ la prima riga e la prima colonna; passiamo poi a liberare dagli elementi non nulli le prime due righe e le prime due colonne. Abbiamo, a turno,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Infine si moltiplichi per $-{}^1/_5$ la terza riga e la terza colonna, per avere

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/10 & -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{array}\right| P' \Big]$$

Così, quando $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/10 & -1 \\ 0 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P'AP = \text{diag}(D_1, D_2)$.

6. Trovare una matrice P non singolare per cui $\overline{P}'AP$ sia nella forma canonica **(15.6)**, data:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & -3+2i \\ 1+i & 2 & -i \\ -3-2i & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1-i & -3+2i & 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 2 & -i & 0 & 1 & 0 \\ -3-2i & i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -13 & 3+2i & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{13} & 0 & \frac{2-3i}{13} & 1 & \frac{5}{13} \\ 0 & 0 & -13 & 3+2i & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2-3i}{5\sqrt{13}} & \frac{13}{5\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3+2i}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} \end{array}\right]$$

$$= [C \mid \bar{P}']$$

e

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2+3i}{5\sqrt{13}} & \frac{3-2i}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{13}{5\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

7. Trovare una matrice P non singolare, tale che $\bar{P}'AP$ sia nella forma canonica (15.6), data:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 2-3i \\ 1-2i & 5 & -4-2i \\ 2+3i & -4+2i & 13 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+2i & 2-3i & 1 & 0 & 0 \\ 1-2i & 5 & -4-2i & 0 & 1 & 0 \\ 2+3i & -4+2i & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5i & -1+2i & 1 & 0 \\ 0 & -5i & 0 & -2-3i & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5i & 2 & 1 & i \\ 0 & -5i & 0 & -2-3i & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 2 & 1 & i \\ 0 & 0 & -5/2 & -2-2i & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{i}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-4-4i}{\sqrt{10}} & \frac{i}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{array}\right]$$

$$= [C \mid \bar{P}']$$

e

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-4+4i}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-i}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

8. Trovare una matrice P non singolare, tale che $\bar{P}'AP$ sia nella forma canonica (15.7), data:

$$A = \begin{bmatrix} i & -1 & -1+i \\ 1 & 0 & 1+2i \\ 1+i & -1+2i & 2i \end{bmatrix}$$

Consideriamo la matrice Hermitiana $H = -iA = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 0 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 2 \end{bmatrix}$.

La matrice non singolare $P = \begin{bmatrix} 1 & -1-2i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ è tale che $\bar{P}'HP = \text{diag}[1, 1, -1]$.

Allora $\bar{P}'AP = \text{diag}[i, i, -i]$.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

9. Trovare una matrice non singolare P tale che $P'AP$ sia nella forma canonica (15.2), essendo date:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Risp. (a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, (d) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. Trovare una matrice non singolare P tale che $P'AP$ sia nella forma canonica (15.3), date:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 1+2i & 1+4i \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 2i & 1+i & 2-4i \\ 1+i & 1+i & -1-2i \\ 2-4i & -1-2i & -3-5i \end{bmatrix}$

Risp. (a) $P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-1-2i) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, (b) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-i) & i/\sqrt{2} & (1+i)/2 \\ 0 & (1-i)/\sqrt{2} & (-3-2i)/13 \\ 0 & 0 & (3+2i)/13 \end{bmatrix}$

11. Trovare una matrice non singolare P tale che $P'AP$ sia nella forma canonica (15.4), date:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

Risp.

(a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. Trovare una matrice non singolare P per cui $\overline{P}'AP$ sia nella forma canonica **(15.6)**, date:

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1-3i \\ 1+3i & 10 \end{bmatrix}, \quad (b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2 \\ 1-i & 3 & -i \\ 2 & i & 4 \end{bmatrix}, \quad (c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 3-2i \\ 1-i & 3 & 3-4i \\ 3+2i & 3+4i & 18 \end{bmatrix}$$

Risp. $$(a)\ P = \begin{bmatrix} 1 & -1+3i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b)\ P = \begin{bmatrix} 1 & -1-i & (-5-i)/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & (2-i)/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad (c)\ P = \begin{bmatrix} 1 & -1-i & (-2+5i) \\ 0 & 1 & (-2-i) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Trovare una matrice P non singolare, tale che $\overline{P}'AP$ sia nella forma canonica **(15.7)**, date:

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ -1+i & i \end{bmatrix} \qquad (c)\ A = \begin{bmatrix} i & -1-i & -1 \\ 1-i & 0 & 1-i \\ 1 & -1-i & -i \end{bmatrix}$$

$$(b)\ A = \begin{bmatrix} i & -1 & 1+i \\ 1 & 2i & i \\ -1+i & i & 6i \end{bmatrix} \qquad (d)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2+i \\ -1 & 0 & 1-2i \\ -2+i & -1-2i & 0 \end{bmatrix}$$

Risp. $$(a)\ P = \begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (c)\ P = \begin{bmatrix} 1 & (1-i)/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b)\ P = \begin{bmatrix} 1 & -i & -2+3i \\ 0 & 1 & -2-i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (d)\ P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & (1-2i)/\sqrt{10} & -1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & (-2-i)/\sqrt{10} & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$$

14. Se è $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, dimostrare che una matrice quadrata C di ordine 2 soddisfa la $C'DC = D$ solo ed esclusivamente se $|C| = 1$.

15. Sia A una matrice simmetrica e reale, quadrata di ordine n non singolare, con indice p. Dimostrare che $|A| > 0$ solo ed unicamente se $n-p$ è pari.

16. Dimostrare che una matrice A simmetrica, non singolare, è congruente alla sua inversa.
Traccia: Assumere $P = BB'$, con $B'AB = I$, e dimostrare che $P'AP = A^{-1}$

17. Rifare la discussione delle matrici simmetriche, compresa la dimostrazione, nel Teorema **I** ottenendo la **(15.6)** per matrici Hermitiane.

18. Dimostrare: Se $A \overset{C}{\sim} B$, A è simmetrica (o emisimmetrica) solo ed unicamente se B è simmetrica (o emisimmetrica).

19. Sia S una matrice simmetrica non singolare, e T una matrice emisimmetrica tale che $(S+T)(S-T)$ è non singolare. Dimostrare che $P'SP = S$ quando

$$P = (S+T)^{-1}(S-T)$$

Traccia: $P'SP = [(S-T)^{-1}(S+T)S^{-1}(S-T)(S+T)^{-1}]^{-1}$.

20. Sia S una matrice simmetrica non singolare, e T una matrice tale che $(S+T)(S-T)$ è non singolare. Dimostrare che per $P'SP = S$ con $P = (S+T)^{-1}(S-T)$ e $I+P$ non singolare, T è emisimmetrica.
Traccia: $T = S(I-P)(I+P)^{-1} = S(I+P)^{-1}(I-P)$.

21. Dimostrare che la congruenza fra matrici quadrate di ordine n è una relazione di equivalenza.

CAPITOLO 16

Forme bilineari

UNA ESPRESSIONE che sia lineare e omogenea in ciascuno dei due insiemi di variabili $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ si definisce forma bilineare in dette variabili. Per esempio,

$$x_1y_1 + 2x_1y_2 - 13x_1y_3 - 4x_2y_1 + 15x_2y_2 - x_2y_3$$

è una forma bilineare nelle variabili (x_1, x_2) e (y_1, y_2, y_3).

La forma bilineare più generale nelle variabili $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ può essere scritta come:

$$\begin{aligned} f(x,y) = \; & a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1n}x_1y_n \\ & + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{2n}x_2y_n \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{m1}x_my_1 + a_{m2}x_my_2 + \cdots + a_{mn}x_my_n \end{aligned}$$

o, più brevemente:

$$\textbf{(16.1)} \qquad f(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

$$= \begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= X'AY$$

in cui $X = [x_1, x_2, \ldots, x_m]'$, $A = [a_{ij}]$, e $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$.

La matrice A dei coefficienti si chiama matrice della forma bilineare, ed il rango di A è il rango della forma stessa.

Vedere il Problema 1.

Esempio 1. Una forma bilineare è:

$$x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= X'AY$$

FORME CANONICHE. Le m variabili x della (16.1) siano sostituite da nuove variabili u mediante la trasformazione lineare

$$(16.2) \qquad x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j, \qquad (i = 1,2,\ldots,m), \qquad \text{ovvero } X = BU$$

ed anche le n variabili y siano sostituite con altre v, ottenute con la trasformazione lineare

$$(16.3) \qquad y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j, \qquad (i = 1,2,\ldots,n), \qquad \text{ovvero } Y = CV$$

Abbiamo $X'AY = (BU)'A(CV) = U'(B'AC)V$. Ora, applicando le trasformazioni lineari $U = IX$, $V = IY$ otteniamo una nuova forma bilineare nelle variabili originali $X'(B'AC)Y = X'DY$.

Due forme bilineari si dicono equivalenti solo ed esclusivamente se esistono delle trasformazioni non singolari che trasportano l'una forma nell'altra.

I. Due forme bilineari, con matrici A e B di ordine $m \times n$ sono equivalenti su F, solo ed unicamente se hanno lo stesso rango.

Se il rango della (16.1) è r, esistono (cap. 5) delle matrici non singolari P e Q tali che

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assumendo $B = P'$ nella (16.2), e $C = Q$ nella (16.3), la forma bilineare è ridotta a

$$(16.4) \qquad U'(PAQ)V = U'\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_rv_r$$

Allora:

II. Ogni forma bilineare su F, di rango r, può essere ridotta con trasformazioni lineari non singolari su F alla forma canonica $u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_rv_r$.

Esempio 2. Per la matrice della forma bilineare $X'AY = X'\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}Y$ dell'Esempio 1,

$$\begin{array}{c} I_3 \\ \\ A \;\; I_3 \end{array} = \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} Q \\ I_3 \;\; P' \end{array}$$

Così, $X = PU = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}U$ e $Y = QV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}V$ riducono $X'AY$ a:

$$U'\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}V = U'I_3V = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Le equazioni della trasformazione sono:

$$\begin{cases} x_1 = u_1 - u_2 \\ x_2 = u_2 \\ x_3 = u_3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y_1 = v_1 - v_3 \\ y_2 = v_2 + v_3 \\ y_3 = v_3 \end{cases}$$

Vedere il Problema 2.

TIPI DI FORME BILINEARI. Una forma bilineare $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j = X'AY$ si chiama:

simmetrica		**simmetrica**
alternata	a seconda che A è	**emisimmetrica**
Hermitiana		**Hermitiana**
Hermitiana alternata		**anti-Hermitiana**

TRASFORMAZIONI COGREDIENTI. Consideriamo una forma bilineare $X'AY$ nei due insiemi di n variabili $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Quando le x e le y sono soggette alla medesima trasformazione $X = CU$ e $Y = CV$, si dice che le variabili sono trasformate in modo cogrediente. Abbiamo:

III. Per trasformazioni cogredienti $X = CU$ e $Y = CV$, la forma bilineare $X'AY$, avente A quadrata di ordine n, viene trasportata nella forma bilineare $U'(C'AC)V$.

Se A è simmetrica, lo è anche $C'AC$; quindi:

IV. Una forma bilineare simmetrica rimane tale per trasformazioni cogredienti delle variabili.

V. Due forme bilineari su F sono equivalenti per trasformazioni cogredienti delle variabili solo ed esclusivamente se le loro matrici sono congruenti su F.

Dal Teorema I, cap. 15, abbiamo:

VI. Una forma bilineare simmetrica di rango r può essere ridotta, con trasformazioni cogredienti non singolari delle variabili, a

$$(16.5) \qquad a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + \cdots + a_rx_ry_r$$

Per i Teoremi II e IV del cap. 15 avremo:

VII. Una forma bilineare simmetrica reale di rango r si può ridurre, tramite trasformazioni cogredienti non singolari delle variabili nel campo reale, a

$$(16.6) \qquad x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \cdots - x_ry_r$$

e nel campo complesso a

$$(16.7) \qquad x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ry_r$$

Vedere il Problema 3.

TRASFORMAZIONI CONTROGREDIENTI. La forma bilineare sia quella del paragrafo precedente. Sottoponendo le x alla trasformazione $X = (C^{-1})'U$ e le y alla $Y = CV$, si dice che le variabili sono trasformate in modo controgrediente. Abbiamo:

VIII. Per trasformazioni controgredienti $X = (C^{-1})'U$ e $Y = CV$, la forma bilineare $X'AY$, avente A quadrata di ordine n, viene trasportata nella forma bilineare $U'(C^{-1}AC)V$.

IX. La forma bilineare $X'IY = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ viene trasformata in se stessa solo ed unicamente se i due insiemi di variabili vengono trasformati in modo controgrediente

FORME BILINEARI RIDUCIBILI IN FATTORI. Nel Problema 4 si dimostra:

X. Una forma bilineare non nulla è riducibile in fattori solo ed esclusivamente se il suo rango è uno.

PROBLEMI RISOLTI

1. $x_1y_1 + 2x_1y_2 - 13x_1y_3 - 4x_2y_1 + 15x_2y_2 - x_2y_3 = \begin{bmatrix} x_1, x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -13 \\ -4 & 15 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & -13 \\ -4 & 15 & -1 \end{bmatrix}Y.$

2. Ridurre $x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - 2x_1y_4 + 2x_2y_1 - 2x_2y_2 + x_2y_3 + 3x_2y_4 + 3x_3y_1 + 4x_3y_3 + x_3y_4$ in forma canonica.

La matrice della forma è $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Per il Problema 6, cap. 5, le matrici non singolari $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sono tali che $PAQ = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Perciò le trasformazioni lineari $X = P'U$ o $\begin{cases} x_1 = u_1 - 2u_2 - u_3 \\ x_2 = u_2 - u_3 \\ x_3 = u_3 \end{cases}$ e $Y = QV$ o $\begin{cases} y_1 = v_1 + \frac{1}{3}v_2 - \frac{4}{3}v_3 - \frac{1}{3}v_4 \\ y_2 = -\frac{1}{6}v_2 - \frac{5}{6}v_3 + \frac{7}{6}v_4 \\ y_3 = v_3 \\ y_4 = v_4 \end{cases}$

riducono $X'AY$ a $u_1v_1 + u_2v_2$.

3. Ridurre la forma bilineare simmetrica $X'AY = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix}Y$, tramite trasformazioni cogredienti, alle (*a*) (16.5) nel campo razionale, (*b*) (16.6) nel campo reale, e (*c*) (16.7) nel campo complesso.

(*a*) Dall'Esempio 1, cap. 15, le trasformazioni lineari $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}U$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}V$

riducono $X'AY$ a $u_1v_1 - u_2v_2 + 4u_3v_3$.

(*b*) Dall'Esempio 2, cap. 15, le trasformazioni lineari $X = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}U$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}V$

riducono $X'AY$ a $u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$.

(*c*) Con il risultato dell'Esempio 2, cap. 15, otteniamo:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Perciò le trasformazioni lineari $X = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2i & -1 \\ 0 & 2 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}U$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2i & -1 \\ 0 & 2 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}V$ riducono $X'AY$ a $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

4. Dimostrare che una forma bilineare non nulla $f(x,y)$ è riducibile in fattori solo ed unicamente se il suo rango è 1.

Supponiamo che la forma sia riducibile in fattori:

$$\sum\sum a_{ij}x_iy_j = (\sum b_ix_i)(\sum c_jy_j) = \sum\sum b_ic_jx_iy_j$$

quindi $a_{ij} = b_ic_j$. Evidentemente ogni minore del secondo ordine di $A = [a_{ij}]$, come

$$\begin{bmatrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{kj} & a_{ks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_ib_j & a_ib_s \\ a_kb_j & a_kb_s \end{bmatrix} = b_jb_s\begin{bmatrix} a_i & a_i \\ a_k & a_k \end{bmatrix}$$

diventa zero: il rango di A è 1.

Viceversa, poniamo che la forma bilineare sia di rango 1. Allora, per il Teorema **I**, esistono delle trasformazioni lineari non singolari che riducono la forma a $U'(B'AC)V = u_1v_1$. Ora, le inverse delle trasformazioni

$$u_i = \sum_j r_{ij}x_j \quad \text{e} \quad v_i = \sum_j s_{ij}y_j$$

portano u_1v_1 in $(\sum_j r_{ij}x_j)(\sum_j s_{ij}y_j) = f(x,y)$, quindi $f(x,y)$ è riducibile in fattori.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

5. Ricavare delle trasformazioni lineari che riducano ciascuna delle seguenti forme bilineari alla forma canonica **(16.4)**:

(*a*) $x_1y_1 - 2x_1y_3 + 3x_2y_1 + x_2y_2 - 3x_2y_3 - x_3y_1 - x_3y_2 - x_3y_3$

(*b*) $X'\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -4 & -11 & 2 & 7 \\ 5 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}Y$, (*c*) $X'\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}Y$, (*d*) $X'\begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 12 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 10 \end{bmatrix}Y$

6. Trovare delle trasformazioni cogredienti che riducano (*a*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 14 \end{bmatrix}Y$ e (*b*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}Y$

alla forma canonica **(16.6)**.

Risp. (*a*) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (*b*) $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4\sqrt{3}/3 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$

7. Se B_1, B_2, C_1, C_2 sono delle matrici non singolari, quadrate di ordine n, tali che $B_1A_1C_1 = B_2A_2C_2 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, si trovi la trasformazione che porta $X'A_1Y$ in $U'A_2V$

Risp. $X = (B_2^{-1}B_1)'U$, $Y = C_1C_2^{-1}V$

8. Interpretare il Problema 23 del cap. 5 nei termini di una coppia di forme bilineari.

9. Scrivere la trasformazione controgrediente a $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}U$. *Risp.* $Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}V$

10. Dimostrare che una trasformazione ortogonale è controgrediente a se stessa, ovvero $X = PU$, $Y = PV$.

11. Dimostrare il Teorema **IX**.

12. Se $X'AY$ è una forma bilineare, non singolare, reale, $X'A^{-1}Y$ si dice sua forma bilineare reciproca. Dimostrare che quando delle forme bilineari reciproche sono trasformate in modo cogrediente con la stessa trasformazione ortogonale, ne risultano ancora delle forme bilineari reciproche.

13. Usando il Problema 4, cap. 15, si dimostri che esistono delle trasformazioni cogredienti $X = PU$, $Y = PV$ le quali riducono una forma bilineare alternata di rango $r = 2t$ alla forma canonica

$$u_1v_2 - u_2v_1 + u_3v_4 - u_4v_3 + \cdots + u_{2t-1}v_{2t} - u_{2t}v_{2t-1}$$

14. Si determinino delle forme canoniche per forme bilineari Hermitiane ed Hermitiane alternate.

Traccia: Vedere le **(15.6)** e **(15.7)**.

CAPITOLO 17

Forme quadratiche

UN POLINOMIO OMOGENEO del tipo

$$\textbf{(17.1)} \qquad q = X'AX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

i cui coefficienti a_{ij} sono elementi di F, si definisce forma quadratica su F nelle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Esempio 1. $q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$ è una forma quadratica nelle variabili x_1, x_2, x_3. La matrice della forma si può scrivere in vari modi, a seconda del modo in cui i termini rettangolari $-4x_1x_2$ e $8x_1x_3$ sono separati per formare i termini $a_{12}x_1x_2, a_{21}x_2x_1$ e $a_{13}x_1x_3, a_{31}x_3x_1$. Stabiliamo che la matrice di una forma quadratica è simmetrica, e i prodotti incrociati saranno sempre separati in modo che sia $a_{ij} = a_{ji}$. Perciò:

$$q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 = X'\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}X$$

La matrice simmetrica $A = [a_{ij}]$ costituisce la matrice della forma quadratica, e il rango di A è rango della forma stessa. Se il rango è $r<n$, la forma quadratica è detta singolare; altrimenti è non singolare.

TRASFORMAZIONI. La trasformazione lineare su F, $X = BY$, porta la forma quadratica **(17.1)** con matrice simmetrica A su F nella forma quadratica

$$\textbf{(17.2)} \qquad (BY)'A(BY) = Y'(B'AB)Y$$

con matrice simmetrica $B'AB$.

Due forme quadratiche nelle stesse variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono dette equivalenti solo ed esclusivamente se esiste una trasformazione lineare non singolare $X = BY$ che, insieme alla $Y = IX$, porta una delle forme nell'altra. Poiché $B'AB$ è congruente con A, abbiamo:

I. Il rango di una forma quadratica è invariante per una trasformazione non singolare delle variabili.

II. Due forme quadratiche su F sono equivalenti, ancora su F, solo ed unicamente se le loro matrici sono congruenti su F.

Dal Problema 1, Cap. 15, segue che una forma quadratica di rango r si può ridurre alla forma:

$$\textbf{(17.3)} \qquad h_1y_1^2 + h_2y_2^2 + \cdots + h_ry_r^2, \qquad h_i \neq 0$$

nella quale si incontrano solo termini con le variabili al quadrato, tramite una trasformazione lineare non singolare $X = BY$. Ricordiamo che la matrice B è il prodotto di matrici colonna elementari, mentre B' è il prodotto, in ordine inverso, delle stesse matrici riga elementari.

Esempio 2. Ridurre $q = X'\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}X$ dell'Esempio 1 alla forma (17.3).

Abbiamo
$$[A\ I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -23 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right] = [D\ B']$$

Perciò $X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}Y$ riduce q a $q' = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$.

Vedere i Problemi 1-2.

RIDUZIONE DI LAGRANGE. La riduzione di una forma quadratica alla forma (17.3) può essere effettuata con un procedimento — la riduzione di Lagrange — che consiste essenzialmente nel completamento ripetuto dei quadrati.

Esempio 3.
$$\begin{aligned} q &= x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 \\ &= \{x_1^2 - 4x_1(x_2 - 2x_3)\} + 2x_2^2 - 7x_3^2 \\ &= \{x_1^2 - 4x_1(x_2 - 2x_3) + 4(x_2 - 2x_3)^2\} + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4(x_2 - 2x_3)^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2^2 - 8x_2x_3) - 23x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2^2 - 8x_2x_3 + 16x_3^2) + 9x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2 - 4x_3)^2 + 9x_3^2 \end{aligned}$$

Perciò
$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ y_2 = x_2 - 4x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ x_2 = y_2 + 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

riduce q a $y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$.

Vedere il Problema 3.

FORME QUADRATICHE REALI. La forma quadratica reale $q = X'AX$ sia ridotta, tramite una trasformazione non singolare reale, alla forma (17.3). Se una o più delle h_i sono negative, esiste una trasformazione non singolare $X = CZ$, in cui C è ottenuta da B con una sequenza di trasformazioni di riga e di colonna del tipo 1, che porta q in

$$s_1z_1^2 + s_2z_2^2 + \cdots + s_pz_p^2 - s_{p+1}z_{p+1}^2 - \cdots - s_rz_r^2 \tag{17.4}$$

dove i termini a coefficienti positivi precedono quelli a coefficienti negativi.

Ora, la trasformazione non singolare

$$\begin{aligned} w_i &= \sqrt{s_i}\, z_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \\ w_j &= z_j \quad , \quad (j = r{+}1, r{+}2, \ldots, n) \end{aligned}$$

ovvero

$$Z = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{s_1}}, \frac{1}{\sqrt{s_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{s_r}}, 1, 1, \ldots, 1\right)W$$

porta la (17.4) nella forma canonica

$$w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_p^2 - w_{p+1}^2 - \cdots - w_r^2 \tag{17.5}$$

Perciò, dato che il prodotto di trasformazioni non singolari è una trasformazione non singolare, abbiamo:

III. Ogni forma quadratica reale può essere ridotta, tramite una trasformazione non singolare reale, alla forma canonica (17.5) in cui p, numero dei termini positivi, si chiama indice, ed r è il rango della forma quadratica data.

Esempio 4. Nell'Esempio 2 la forma quadratica $q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$ veniva ridotta a $q' = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$. La trasformazione non singolare $y_1 = z_1,\ y_2 = z_3,\ y_3 = z_2$ porta q' in $q'' = z_1^2 + 9z_2^2 - 2z_3^2$, mentre la trasformazione non singolare $z_1 = w_1,\ z_2 = w_2/3,\ z_3 = w_3/\sqrt{2}$ riduce q'' a $q''' = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$.

Combinando le trasformazioni, vediamo che la trasformazione lineare non singolare

$$\begin{aligned} x_1 &= w_1 + \tfrac{4}{3}w_2 + \sqrt{2}\,w_3 \\ x_2 &= \tfrac{4}{3}w_2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,w_3 \\ x_3 &= \tfrac{1}{3}w_2 \end{aligned} \quad \text{ovvero} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & \sqrt{2} \\ 0 & 4/3 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}W$$

riduce q a $q''' = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$. La forma quadratica è di rango 3 e indice 2.

LEGGE D'INERZIA DI SYLVESTER. Nel Problema 5 viene dimostrata la legge d'inerzia:

IV. Se una forma quadratica reale viene ridotta con due trasformazioni non singolari reali a forme canoniche (17.5), queste hanno lo stesso rango e lo stesso indice.

Perciò l'indice di una matrice simmetrica reale dipende dalla matrice, e non dalle trasformazioni elementari che producono la (15.2).

La differenza tra il numero dei termini positivi e il numero dei negativi $p - (r - p)$, nella (17.5) si chiama sigla della forma quadratica. Come conseguenza del Teorema **IV** si ha:

V. Due forme quadratiche reali, ciascuna in n variabili, sono equivalenti sul campo reale solo ed unicamente se hanno lo stesso rango e lo stesso indice, oppure lo stesso rango e la stessa sigla.

FORME QUADRATICHE COMPLESSE. La forma quadratica complessa $X'AX$ sia ridotta, con una trasformazione non singolare, alla forma (17.3). E' chiaro che la trasformazione non singolare

$$\begin{aligned} z_i &= \sqrt{h_i}\, y_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \\ z_j &= y_j \quad , \quad (j = r{+}1, r{+}2, \ldots, n) \end{aligned}$$

ovvero

$$Y = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1}}, \frac{1}{\sqrt{h_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{h_r}}, 1, 1, \ldots, 1\right) Z$$

porta la (**17.3**) nella:

(**17.6**) $$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$$

Perciò:

VI. Qualsiasi forma quadratica di rango r sul campo complesso si può ridurre, con una trasformazione non singolare sempre sul campo complesso, alla forma canonica (**17.6**).

VII. Due forme quadratiche complesse, ciascuna in n variabili, sono equivalenti sul campo complesso solo ed unicamente se hanno lo stesso rango.

FORME DEFINITE E SEMI-DEFINITE. Una forma quadratica non singolare reale $q = X'AX$, $|A| \neq 0$, in n variabili si dice definita positiva se il suo rango e il suo indice sono uguali. Perciò nel campo reale una forma quadratica definita positiva può essere ridotta a $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$, e per ogni insieme non triviale di valori delle x è $q > 0$.

Una forma quadratica singolare reale $q = X'AX$, $|A| = 0$ si dice semi-definita positiva se ha rango e indice uguali, cioè $r = p < n$. Perciò nel campo reale una forma quadratica positiva semi-definita si può ridurre a $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2$, $r < n$, e per ogni insieme non triviale di valori delle x sarà $q \geq 0$.

Una forma quadratica non singolare reale $q = X'AX$ si chiama definita negativa se il suo indice $p = 0$, cioè $r = n$, $p = 0$. Quindi, nel campo reale una forma definita negativa si può ridurre a $-y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2$, e per ogni insieme non triviale di valori della x sarà $q < 0$.

Una forma quadratica singolare reale $q = X'AX$ si chiama semi-definita negativa se il suo indice $p = 0$, cioè $r < n$, $p = 0$. Perciò, nel campo reale una forma semi-definita negativa si può ridurre a $-y_1^2 - y_2^2 - \cdots y_r^2$ e per ogni insieme non triviale di valori della x sarà $q \leq 0$.

Evidentemente, se q è definita (o semi-definita) negativa, $-q$ sarà definita (o semi-definita) positiva.

Per forme quadratiche definite positive avremo:

VIII. Se $q = X'AX$ è definita positiva, è allora $|A| > 0$.

MINORI PRINCIPALI. Un minore di una matrice A si dice principale se è ottenuto cancellando delle righe — e le colonne di ugual numero — di A. Perciò gli elementi diagonali di un minore principale di A sono elementi diagonali di A.

Nel Problema 6 si dimostra:

IX. Ogni matrice simmetrica di rango r ha almeno un minore principale di ordine r differente da zero.

MATRICI DEFINITE E SEMI-DEFINITE. La matrice A di una forma quadratica reale $q = X'AX$ si dice definita o semi-definita a seconda che la forma quadratica stessa sia definita, o semi-definita. Abbiamo:

X. Una matrice simmetrica reale A è definita positiva solo ed esclusivamente se esiste una matrice non singolare C tale che $A = C'C$.

XI. Una matrice simmetrica reale A, di rango r, è semi-definita positiva solo ed esclusivamente se esiste una matrice C di rango r tale che $A = C'C$.

Vedere il Problema 7.

XII. Se A è definita positiva, ogni minore principale di A è positivo.

Vedere il Problema 8.

XIII. Se A è semi-definita positiva, ogni minore principale di A è non negativo.

FORME QUADRATICHE REGOLARI. Per una matrice simmetrica $A = [a_{ij}]$ su F, definiamo i minori principali dominanti:

(**17.7**) $$p_0 = 1, \quad p_1 = a_{11}, \quad p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad p_n = |A|$$

Nel Problema 9 dimostriamo:

XIV. Ogni matrice A simmetrica, non singolare, quadrata di ordine n, può essere riordinata con lo scambio di date righe e delle corrispondenti colonne in modo che non siano contemporaneamente nulli p_{n-1} e p_{n-2}.

XV. Se A è una matrice simmetrica, e se $p_{n-2}p_n \neq 0$ mentre $p_{n-1} = 0$, allora p_{n-2} e p_n hanno segni opposti.

Esempio 5. Per la forma quadratica $X'AX = X'\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}X$, $p_0 = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$, $p_4 = |A| = 1$.

Qui è $\alpha_{33} \neq 0$; la trasformazione $X = K_{34}\tilde{X}$ porta a:

(i) $$\tilde{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}\tilde{X}$$

per cui $p_0 = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = -1$, $p_4 = 1$. Perciò, per la (i), p_2 e p_3 non sono contemporaneamente nulli.

Una matrice simmetrica A di rango r si definisce ordinata regolarmente se non sono nulli due p consecutivi nella sequenza $p_0, p_1, \ldots, p_r$. Quando A è ordinata regolarmente, la forma quadratica $X'AX$ si dice regolare. Nell'Esempio 5 la forma data è non regolare; la forma quadratica (i) dello stesso esempio è regolare.

A sia una matrice simmetrica di rango r. Per il Teorema **IX** essa conterrà almeno un minore principale M, quadrato di ordine r, non nullo, i cui elementi possono essere portati nell'angolo superiore sinistro di A. Allora è $p_r \neq 0$, mentre $p_{r+1} = p_{r+2} = \ldots = p_n = 0$. Per il Teorema **XIV**, si possono riordinare le prime r righe e le prime r colonne in modo che almeno uno fra p_{r-1} e p_{r-2} sia diverso da zero. Se $p_{r-1} \neq 0$ e $p_{r-2} = 0$, useremo il procedimento suddetto sulla matrice di p_{r-1}; se $p_{r-2} \neq 0$, lo useremo sulla matrice di p_{r-2}; e così via, finché M non è ordinato regolarmente. Perciò:

XVI. Ogni matrice (o forma quadratica) di rango r può essere ordinata regolarmente.

Vedere il Problema 10.

XVII. Una forma quadratica reale $X'AX$ è definita positiva solo ed esclusivamente se il suo rango è n, e se tutti i minori principali dominanti sono positivi.

XVIII. Una forma quadratica reale $X'AX$ di rango r è semi-definita positiva solo ed unicamente se ciascuno dei minori principali $p_0, p_1, \ldots, p_r$ è positivo.

METODO DI RIDUZIONE DI KRONECKER. Il metodo di Kronecker per ridurre una forma quadratica in un'altra in cui compaiono solo i quadrati delle variabili si basa su:

XIX. Se $q = X'AX$ è una forma quadratica su F, in n variabili e di rango r, con una trasformazione lineare non singolare su F essa può essere portata a $q' = \widetilde{X}'B\widetilde{X}$ in cui un minore C di A, di r righe, non singolare, occupa l'angolo superiore sinistro di B. Inoltre esiste una trasformazione lineare non singolare su F che riduce q a $q'' = \widetilde{X}'C\widetilde{X}$, forma quadratica in r variabili non singolare.

XX. Se $q = X'AX$ è una forma quadratica non singolare su F, in n variabili, ed è $p_{n-1} = \alpha_{nn} \neq 0$, la trasformazione non singolare

$$\begin{cases} x_i = y_i + \alpha_{in} y_n, & (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ x_n = \alpha_{nn} y_n \end{cases}$$

o

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{nn} \end{bmatrix} Y$$

porta q in $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} y_i y_j + p_{n-1} p_n y_n^2$, in cui si è isolato un termine con le variabili al quadrato.

Esempio 6. Per la forma quadratica $X'AX = X'\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}X$, $p_2 = \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

La trasformazione non singolare

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \alpha_{13} y_3 = y_1 - 8y_3 \\ x_2 = y_2 + \alpha_{23} y_3 = y_2 - 8y_3 \\ x_3 = \alpha_{33} y_3 = -2y_3 \end{cases} \quad \text{o} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} Y$$

riduce $X'AX$ a:

$$Y'\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & -8 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}Y = Y'\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}Y$$

in cui la variabile y_3 compare solo al quadrato.

XXI. Se $q = X'AX$ è una forma quadratica non singolare su F, e $\alpha_{n-1,n-1} = \alpha_{nn} = 0$ mentre $\alpha_{n,n-1} \neq 0$, la trasformazione non singolare su F:

$$\begin{cases} x_i = y_i + \alpha_{i,n-1} y_{n-1} + \alpha_{in} y_n, & (i = 1, 2, \dots, n-2) \\ x_{n-1} = \alpha_{n-1,n} y_n, & x_n = \alpha_{n,n-1} y_{n-1} \end{cases}$$

ovvero

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n-2,n-1} & \alpha_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} Y$$

porta q in $\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} \alpha_{ij} y_i y_j + 2\alpha_{n,n-1} p_n y_{n-1} y_n$.

L'ulteriore trasformazione

$$\begin{cases} y_i = z_i, & (i = 1, 2, \dots, n-2) \\ y_{n-1} = z_{n-1} - z_n \\ y_n = z_{n-1} + z_n \end{cases}$$

conduce a $\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} \alpha_{ij} z_i z_j + 2\alpha_{n,n-1} p_n (z_{n-1}^2 - z_n^2)$, in cui sono isolati due termini al quadrato con segni opposti.

Esempio 7. Nella forma quadratica

$$X'AX = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} X$$

$\alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$, mentre $\alpha_{32} = -1 \neq 0$. La trasformazione non singolare

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \alpha_{12} y_2 + \alpha_{13} y_3 \\ x_2 = \alpha_{23} y_3 \\ x_3 = \alpha_{32} y_2 \end{cases} \quad \text{o} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} Y$$

riduce $X'AX$ a

$$Y'\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}Y = Y'\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}Y = Y'BY = y_1^2 + 2y_2 y_3$$

La trasformazione

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 - z_3 \\ y_3 = z_2 + z_3 \end{cases} \quad \text{o} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} Z$$

conduce $Y'BY$ a

$$Z'\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}Z = Z'\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}Z = z_1^2 + 2z_2^2 - 2z_3^2$$

Consideriamo adesso una forma quadratica con n variabili e rango r. Per il Teorema **XIX**, q può venire ridotta a $q_1 = X'AX$ in cui A possiede un minore quadrato di ordine r non singolare nell'angolo superiore sinistro e zeri altrove. Per il Teorema **XVI**, A può essere ordinata regolarmente.

Se $p_{r-1} \neq 0$, si può usare il Teorema **XX** per isolare un termine al quadrato

$$p_{r-1} p_r y_r^2 \tag{17.8}$$

Se $p_{r-1} = 0$, mentre $\alpha_{r-1,r-1} \neq 0$, degli scambi fra le ultime due righe e le ultime due colonne danno una matrice in cui si ha il nuovo $p_{r-1} = \alpha_{r-1,r-1} \neq 0$. Poiché $p_{r-2} \neq 0$, il Teorema **XX** usato due volte permette di isolare due termini al quadrato:

$$p_{r-2}\alpha_{r-1,r-1} y_{r-1}^2 + \alpha_{r-1,r-1} p_r y_r^2 \tag{17.9}$$

che hanno segni opposti: hanno infatti segni opposti p_{r-2} e p_r, secondo il Teorema **XV**.

Se $p_{r-1} = 0$ e $\alpha_{r-1,\,r-1} = 0$, si ha allora (Problema 9) $\alpha_{r,\,r-1} \neq 0$ e si può usare il Teorema **XXI** per isolare due termini al quadrato

$$2\alpha_{r,\,r-1}p_r(y_{r-1}^2 - y_r^2) \qquad (17.10)$$

aventi segni opposti.

Si può ripetere questo procedimento finché la forma quadratica data sia ridotta ad un'altra, contenente soltanto termini con le variabili al quadrato.

Nella (**17.8**) il termine isolato risulterà positivo o negativo a seconda che la sequenza p_{r-1}, p_r presenti una permanenza o una variazione di segno. Nelle (**17.9**) e (**17.10**) si vede che le sequenze $p_{r-2}, \alpha_{r-1,\,r-1}, p_r$ e $p_{r-2}, \alpha_{r,\,r-1}, p_r$ presentano una permanenza e una variazione di segno indipendentemente dal segno di $\alpha_{r-1,\,r-1}$ e di $\alpha_{r,\,r-1}$. Perciò:

XXII. Se $q = X'AX$, forma quadratica regolare di rango r, viene ridotta a forma canonica con il metodo di Kronecker, il numero di termini positivi è uguale al numero di permanenze di segno, e quello dei termini negativi è quello delle variazioni di segno nella sequenza $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_r$, nella quale un eventuale zero può essere computato come positivo o come negativo, ma va computato.

Vedere i Problemi 11-13.

FORME QUADRATICHE RIDUCIBILI IN FATTORI. La $X'AX \neq 0$, a coefficienti complessi, sia la forma quadratica data.

Poniamo che $X'AX$ si renda in fattori così:

$$X'AX = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n) \qquad \text{(i)}$$

Se i fattori sono linearmente indipendenti, almeno una matrice $\begin{bmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{bmatrix}$ è non singolare.

Le variabili e i relativi coefficienti siano nuovamente numerati, in modo che $\begin{bmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{bmatrix}$ divenga $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$.

La trasformazione non singolare

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \\ y_3 = x_3, \;\ldots,\; y_n = x_n \end{cases}$$

trasforma (i) in y_1y_2, di rango 2. Perciò la (i) è di rango 2.

Se i fattori sono linearmente dipendenti, almeno un elemento $a_i \neq 0$. Le variabili e i loro coefficienti siano numerati di nuovo, in modo che a_i sia a_1. La trasformazione non singolare

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = x_2, \;\ldots,\; y_n = x_n \end{cases}$$

trasforma la (i) in $\frac{b_1}{a_1}y_1^2$, di rango 1. Perciò la (i) è di rango 1.

Reciprocamente, se $X'AX$ ha rango 1, o 2, si può ridurre rispettivamente a y_1^2, o $y_1^2 + y_2^2$, per il Teorema **VI**; in entrambi i casi le forme si possono scrivere nel campo complesso come prodotto di due fattori lineari.

Abbiamo così dimostrato:

XXIII. Una forma quadratica $X'AX \neq 0$ a coefficienti complessi corrisponde al prodotto di due fattori lineari solo ed unicamente se il suo rango è $r \leq 2$.

PROBLEMI RISOLTI

1. Ridurre $q = X'AX = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix}X$ alla forma (17.3).

   Dall'esempio 1, cap. 15:

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] = [D \mid P']$$

   Perciò la trasformazione $X = PY = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}Y$ riduce q alla forma richiesta $y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2$.

2. Ridurre $q = X'AX = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}X$ alla forma (17.3).

   Troviamo

$$[A \mid I] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] = [D \mid P']$$

   Perciò la trasformazione $X = PY = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}Y$ riduce q a $y_1^2 + 8y_2^2 - 2y_3^2$.

3. Riduzione di Lagrange.

   (*a*)

$$\begin{aligned} q &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 8x_1x_2 + 12x_1x_3 + 8x_1x_4 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4 \\ &= 2\{x_1^2 + 2x_1(2x_2+3x_3+2x_4)\} + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4 \\ &= 2\{x_1^2 + 2x_1(2x_2+3x_3+2x_4) + (2x_2+3x_3+2x_4)^2\} \\ &\qquad + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4 - 2(2x_2+3x_3+2x_4)^2 \\ &= 2(x_1+2x_2+3x_3+2x_4)^2 - 3\{x_2^2 + 2x_2(x_3+4x_4)\} + x_3^2 - 32x_4^2 - 40x_3x_4 \\ &= 2(x_1+2x_2+3x_3+2x_4)^2 - 3(x_2+x_3+4x_4)^2 + 4(x_3-2x_4)^2 \end{aligned}$$

   Perciò la trasformazione $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ y_2 = x_2 + x_3 + 4x_4 \\ y_3 = x_3 - 2x_4 \\ y_4 = x_4 \end{cases}$ riduce q a $2y_1^2 - 3y_2^2 + 4y_3^2$.

   (*b*) Per la forma quadratica del Problema 2, abbiamo:

$$q = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 4x_3^2 = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 + 8x_2x_3$$

   Giacché non vi sono termini in x_2^2 o x_3^2, mentre ce n'è uno in x_2x_3, useremo la trasformazione non singolare

(i) $\qquad x_1 = z_1, \quad x_2 = z_2, \quad x_3 = z_2 + z_3$

per ottenere

$$q = (z_1 + 4z_2 + 2z_3)^2 + 8z_2^2 + 8z_2 z_3 = (z_1 + 4z_2 + 2z_3)^2 + 8(z_2 + \tfrac{1}{2}z_3)^2 - 2z_3^2 = y_1^2 + 8y_2^2 - 2y_3^2$$

Ora, $Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Z$; dalla (i), $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X$; quindi $Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X$.

Perciò la trasformazione non singolare $X = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} Y$ effettua la riduzione.

4. Con il risultato del Problema 2,

$$[A \mid I] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

e applicando le trasformazioni $H_2(\frac{1}{4}\sqrt{2})$, $K_2(\frac{1}{4}\sqrt{2})$ e $H_3(\frac{1}{2}\sqrt{2})$, $K_3(\frac{1}{2}\sqrt{2})$, abbiamo

$$[A \mid I] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{array}\right] = [C \mid Q']$$

Perciò la trasformazione $X = QY = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{bmatrix} Y$ riduce $q = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} X$ alla forma canonica $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

5. **Dimostrare che se una forma quadratica reale q viene portata con due trasformazioni non singolari in due distinte forme ridotte**

(i) $\qquad y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \cdots - y_r^2$

e

(ii) $\qquad y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_q^2 - y_{q+1}^2 - y_{q+2}^2 - \cdots - y_r^2$

allora è $p = q$.

Supponiamo $q > p$. Sia $X = FY$ la trasformazione che dà la (i), e $X = GY$ quella che dà la (ii). Allora:

$$Y = F^{-1}X = \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{nn}x_n \end{cases}$$

e

$$Y = G^{-1}X = \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n \end{cases}$$

riportano rispettivamente (i) e (ii) in q. Perciò:

(iii)
$$\begin{aligned} &(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n)^2 + \cdots + (b_{p1}x_1 + b_{p2}x_2 + \cdots + b_{pn}x_n)^2 \\ &\quad - (b_{p+1,1}x_1 + b_{p+1,2}x_2 + \cdots + b_{p+1,n}x_n)^2 - \cdots - (b_{r1}x_1 + b_{r2}x_2 + \cdots + b_{rn}x_n)^2 \\ &= (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n)^2 + \cdots + (c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \cdots + c_{qn}x_n)^2 \\ &\quad - (c_{q+1,1}x_1 + c_{q+1,2}x_2 + \cdots + c_{q+1,n}x_n)^2 - \cdots - (c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \cdots + c_{rn}x_n)^2 \end{aligned}$$

Consideriamo le $r - q + p < r$ equazioni

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{p1}x_1 + b_{p2}x_2 + \cdots + b_{pn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_{q+1,1}x_1 + c_{q+1,2}x_2 + \cdots + c_{q+1,n}x_n = 0 \\ c_{q+2,1}x_1 + c_{q+2,2}x_2 + \cdots + c_{q+2,n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \cdots + c_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Per il Teorema **IV**, cap. 10, esse hanno una soluzione non triviale: diciamo $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Quando la si sostituisce in (iii) abbiamo:

$$\begin{aligned} &-(b_{p+1,1}\alpha_1 + b_{p+1,2}\alpha_2 + \cdots + b_{p+1,n}\alpha_n)^2 - \cdots\cdots - (b_{r1}\alpha_1 + b_{r2}\alpha_2 + \cdots + b_{rn}\alpha_n)^2 \\ &= (c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + \cdots + c_{1n}\alpha_n)^2 + \cdots\cdots + (c_{q1}\alpha_1 + c_{q2}\alpha_2 + \cdots + c_{qn}\alpha_n)^2 \end{aligned}$$

Questo richiede chiaramente che ogni termine al quadrato sia nullo. Ma allora né F né G sono non singolari, contrariamente all'ipotesi. Perciò, $q \leq p$. Ripetendo il ragionamento già fatto nell'ipotesi che sia $q < p$ si giunge ugualmente ad una contraddizione. Sarà quindi $q = p$.

6. **Dimostrare che ogni matrice simmetrica A di rango r ha almeno un minore principale di ordine r differente da zero.**

Dal momento che A è di rango r, essa ha almeno un minore quadrato di ordine r differente da zero. Poniamo che esso si trovi nelle righe numerate $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Queste righe siano spostate in su come prime r righe della matrice; le colonne numerate $i_1, i_2, \ldots, i_r$ siano portate a sinistra come prime r colonne.

Ora, le prime r righe sono linearmente indipendenti, mentre tutte le altre sono loro combinazioni lineari. Con altre opportune combinazioni lineari delle prime r righe, e sommandole alle restanti, queste ultime $n - r$ righe si possono ridurre a zero. Poiché A è simmetrica, le stesse operazioni sulle colonne ridurranno a zero le ultime $n - r$ colonne. Quindi abbiamo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_r} & \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_r} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{i_ri_1} & a_{i_ri_2} & \cdots & a_{i_ri_r} & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

in cui un minore non nullo si trova nell'angolo superiore sinistro della matrice. E questo è chiaramente un minore principale di A.

7. **Dimostrare che una matrice simmetrica reale A di rango r è semi-definita positiva solo ed esclusivamente se esiste una matrice c di rango r tale che $A = C'C$.**

Poiché A è di rango r, la sua forma canonica è $N_1 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Esiste allora una matrice B non sin-

golare tale che $A = B'N_1B$. Poiché $N_1' = N_1 = N_1^2$, abbiamo: $A = B'N_1B = B'N_1N_1B = B'N_1'\cdot N_1B$. Poniamo $C = N_1B$; allora C è di rango r, ed è $A = C'C$ come richiesto.

Reciprocamente, sia C una matrice quadrata di ordine n, reale, di rango r; allora $A = C'C$ è di rango $s \leq r$. La sua forma canonica sia

$$N_2 = \text{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_s, 0, 0, \ldots, 0)$$

in cui i d_i sono +1 o −1. Esiste allora una matrice E reale non singolare, tale che $E'(C'C)E = N_2$. Poniamo $CE = B = [b_{ij}]$. Poiché $B'B = N_2$, avremo:

$$b_{i1}^2 + b_{i2}^2 + \cdots + b_{in}^2 = d_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

e

$$b_{j1}^2 + b_{j2}^2 + \cdots + b_{jn}^2 = 0, \qquad (j = s+1, s+2, \ldots, n)$$

chiaramente è sempre $d_i > 0$, e A è semi-definita positiva.

8. Dimostriamo che se A è definita positiva, ogni minore principale di A è positivo.

Sia $q = X'AX$. Il minore principale di A che si ottiene cancellandone l'i-ma riga e i-ma colonna è la matrice A_i della forma quadratica q_1 ottenuta da q ponendo $x_i = 0$. Ora, ogni valore di q_i per insiemi non triviali di valori delle sue variabili è anche un valore di q, quindi è positivo. Perciò A_i è definita positiva.

Si può ripetere il ragionamento per i minori principali $A_{ij}, A_{ijk}, \ldots$ ottenuti da A cancellando due, tre, . . . righe e le corrispondenti colonne di A.

Per il Teorema **VI**, $A_i > 0$, $A_{ij} > 0, \ldots$; perciò, ogni minore principale è positivo.

9. Dimostrare: Ogni matrice $A = [a_{ij}]$ non singolare, quadrata di ordine n, può essere nuovamente ordinata tramite scambi di date righe e delle corrispondenti colonne in modo che non siano contemporaneamente nulli p_{n-1} e p_{n-2}.

Il teorema è chiaramente vero se A è di ordine 1 o 2. E' inoltre vero per A di ordine $n > 2$, quando $p_{n-1} = \alpha_{nn} \neq 0$. Poniamo $\alpha_{nn} = 0$; allora avremo: (*a*) alcuni $\alpha_{ii} \neq 0$, o (*b*) tutti $\alpha_{ii} = 0$.

Poniamo: (*a*) alcuni $\alpha_{ii} \neq 0$. Dopo che l'i-ma riga e l'i-ma colonna sono state spostate per occupare la posizione di ultima riga e ultima colonna, la nuova matrice ha $p_{n-1} = \alpha_{ii} \neq 0$.

Poniamo: (*b*) tutti $\alpha_{ii} = 0$. Poiché $|A| \neq 0$, almeno un $\alpha_{ni} \neq 0$. Spostiamo l'i-ma riga nella $(n-1)$-ma posizione, l'i-ma colonna ancora nella $(n-1)$ – ma posizione. Nella nuova matrice si ha $\alpha_{n-1,n} = \alpha_{n,n-1} \neq 0$.

Per la **(6.6)** troviamo che è:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n,n-1} & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix} = -\alpha_{n-1,n}^2 = p_{n-2}p_n$$

e $p_{n-2} \neq 0$.

Si noti che con ciò si dimostra anche il Teorema **XV**.

10. Riordinare le variabili in modo che $q = X'AX = X'\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}X$ sia regolare.

Qui abbiamo $p_0 = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = -4$, $p_4 = -3$. Poiché $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 \neq 0$, esaminiamo la matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ di p_3. Il cofattore è $B_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$; scambiando seconda e terza riga,

seconda e terza colonna di A si ottiene:

$$X'\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}X$$

per cui si ha $p_0 = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = -4$, $p_3 = -4$, $p_4 = -3$. Qui x_2 è stato contato come x_3, e x_3 come x_2.

11. Ridurre, con il metodo di Kronecker: $q = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}X$.

Abbiamo $p_0 = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = -3$, $p_3 = 20$, $p_4 = -5$ e q è regolare. La sequenza dei p, presenta una permanenza di segno e tre variazioni; la forma ridotta avrà un termine positivo e tre negativi.

Poiché si ha sempre $p_i \neq 0$, l'applicazione ripetuta del Teorema **XIX** porta alla forma ridotta

$$p_0p_1y_1^2 + p_1p_2y_2^2 + p_2p_3y_3^2 + p_3p_4y_4^2 = y_1^2 - 3y_2^2 - 60y_3^2 - 100y_4^2$$

12. Ridurre con il metodo di Kronecker: $q = X'AX = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}X$.

Qui, A è di rango 3, e $\alpha_{33} \neq 0$. Uno scambio delle ultime due righe e delle ultime due colonne porta A in $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$, in cui $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \neq 0$. Dato che B è di rango 3, può essere ridotto a $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Si è così ridotta q a $\tilde{X}'C\tilde{X} = \tilde{X}'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\tilde{X}$ con $p_0 = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = -1$. La forma ridotta conterrà due termini positivi ed uno negativo. Essendo $p_2 = 0$ ma $\gamma_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, la forma ridotta sarà, per la **(16.8)**,

$$p_0p_1y_1^2 + p_1\gamma_{22}y_2^2 + \gamma_{22}p_3y_3^2 = y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2$$

13. Ridurre con il metodo di Kronecker: $q = X'\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}X$.

E' adesso $p_0 = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = -9$, $p_4 = 27$; la forma ridotta avrà due termini positivi e due negativi. Consideriamo la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ di p_3. Dato che $\beta_{33} = 0$ mentre $\beta_{32} = -3 \neq 0$ la forma ridotta è, per le **(16.8)** e **(16.9)**,

$$p_0p_1y_1^2 + 2\beta_{32}p_3(y_2^2 - y_3^2) + p_3p_4y_4^2 = y_1^2 + 54y_2^2 - 54y_3^2 - 243y_4^2$$

14. Dimostrare che per un insieme di vettori ad n dimensioni, reali, $X_1, X_2, \ldots, X_p$,

$$|G| = \begin{vmatrix} X_1\cdot X_1 & X_1\cdot X_2 & \cdots & X_1\cdot X_p \\ X_2\cdot X_1 & X_2\cdot X_2 & \cdots & X_2\cdot X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_p\cdot X_1 & X_p\cdot X_2 & \cdots & X_p\cdot X_p \end{vmatrix} \geq 0$$

sussistendo l'eguaglianza solo ed esclusivamente se l'insieme è linearmente dipendente.

(*a*) Poniamo che i vettori X_i siano linearmente indipendenti e sia $X = [x_1, x_2, \ldots, x_p]' \neq 0$. Allora

$$Z = \sum_{i=1}^{p} X_i x_i \neq 0 \quad e \quad 0 < Z\cdot Z = (\sum_{i=1}^{p} X_i x_i)\cdot(\sum_{j=1}^{p} X_j x_j) = X'(X_i' X_j)X = X'(X_i\cdot X_j)X = X'GX.$$

Dato che questa forma quadratica è definita positiva, è $|G| > 0$.

(*b*) Supponiamo che i vettori X_i siano linearmente dipendenti. Esistono allora degli scalari $k_1, k_2, \ldots, k_p$, non tutti nulli, tali che $\xi = \sum_{i=1}^{p} k_i X_i = 0$ e quindi tali che:

$$X_j\cdot\xi = k_1 X_j\cdot X_1 + k_2 X_j\cdot X_2 + \cdots + k_p X_j\cdot X_p = 0, \qquad (j = 1,2,\ldots,p)$$

Perciò il sistema di equazioni omogenee

$$X_j\cdot X_1 x_1 + X_j\cdot X_2 x_2 + \cdots + X_j\cdot X_p x_p = 0, \qquad (j = 1,2,\ldots,p)$$

ha una soluzione non triviale $x_i = k_i$, $(i = 1,2,\ldots,p)$, e $|G| = 0$.

Abbiamo dimostrato che $|G| \geq 0$. Per dimostrare il reciproco di (*b*), dobbiamo soltanto assumere $|G| = 0$ e invertire i passaggi di (*b*) per ottenere $X_j\cdot\xi = 0$, $(j = 1,2,\ldots,p)$ con $\xi = \sum_{i=1}^{p} k_i X_i$. Dunque $\sum_{j=1}^{p} k_j X_j\cdot\xi = \xi\cdot\xi = 0$, $\xi = 0$, e i vettori dati X_j sono linearmente dipendenti.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

15. Scrivere in notazione matriciale le seguenti forme quadratiche:

(*a*) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$ (*b*) $2x_1^2 - 6x_1x_2 + x_3^2$ (*c*) $x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$

Risp. (*a*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}X$ (*b*) $X'\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}X$ (*c*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & -4 & -3 \end{bmatrix}X$

16. Scrivere completamente la forma quadratica in x_1, x_2, x_3 la cui matrice è $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$.

Risp. $2x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 - 5x_3^2$

17. Ridurre con il metodo del Problema 1, e con la riduzione di Lagrange:

(*a*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 18 \end{bmatrix}X$ (*b*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}X$ (*c*) $X'\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}X$ (*d*) $X'\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}X$

Risp. (*a*) $y_1^2 + 2y_2^2 - 48y_3^2$ (*b*) $y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2$ (*c*) $y_1^2 - y_2^2 + 8y_3^2$ (*d*) $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

Traccia: In (*c*) e (*d*), usare $x_1 = z_3$, $x_2 = z_1$, $x_3 = z_2$.

18. (*a*) Dimostrare che $X'\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}X = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}X$ ma le matrici sono di rango diverso.

(*b*) Dimostrare che la matrice simmetrica di una forma quadratica è unica.

19. Dimostrare che sul campo reale $x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3$ e $9x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 8x_2x_3$ sono equivalenti.

20. Dimostrare che una matrice simmetrica reale è definita positiva (o negativa) solo ed unicamente se è congruente con I (o $-I$) sul campo reale.

21. Dimostrare che $X'AX$ del Problema 12 viene ridotta a $\tilde{X}'C\tilde{X}$ dalla $X = R\tilde{X}$, in cui $R = K_{34}K_{41}(-5)K_{42}(1)$. Provare quindi il Teorema **XIX**.

22. (*a*) Dimostrare che se due forme quadratiche reali nelle stesse variabili sono definite positive, ugualmente lo è la loro somma.

(*b*) Dimostrare che se q_1 è una forma definita positiva in $x_1, x_2, \ldots, x_s$, e q_2 è una forma definita positiva in $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$, allora $q = q_1 + q_2$ è ancora una forma definita positiva in $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

23. Dimostrare che se C è una matrice non singolare reale, $C'C$ è definita positiva.

Traccia: Si consideri $X'IX = Y'C'ICY$.

24. Si dimostri che ogni matrice A definita positiva può essere scritta come $A = C'C$. (I Problemi 23 e 24 completano la dimostrazione del Teorema X).

Traccia: Considerare $D'AD = I$.

25. Dimostrare che se una matrice A simmetrica reale è definita positiva, lo è anche A^p, per p intero positivo qualsiasi.

26. Dimostrare che se A è una matrice simmetrica, definita positiva, reale, mentre B e C sono tali che $B'AB = I$ e $A = C'C$, la CB è ortogonale.

27. Dimostrare: Ogni minore principale di una matrice A semi-definita positiva, o è uguale o è maggiore di zero.

28. Dimostrare che $ax_1^2 - 2bx_1x_2 + cx_2^2$ è definita positiva solo ed unicamente se $a > 0$ e $|A| = ac - b^2 > 0$.

29. Verificare l'effetto assegnato alla trasformazione nei Teoremi **XX** e **XXI**.

30. Trasformare in forma canonica, dopo aver riordinato le variabili ove necessario, ciascuna delle forme seguenti. Usare la riduzione di Kronecker.

(*a*) $X'\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}X$ (*c*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}X$ (*e*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}X$ (*g*) $X'\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}X$

(*b*) $X'\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}X$ (*d*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}X$ (*f*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}X$ (*h*) $X'\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}X$

Traccia. Nella (*g*) si riordinino le variabili per ottenere (*e*), e poi come nel Problema 17(*d*).

Risp. (*a*) $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 1$; $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$
(*b*) $4y_1^2 - 16y_2^2 + 16y_3^2$
(*c*) $y_1^2 - 4y_2^2 + 4y_3^2 - 3y_4^2$
(*d*) $y_1^2 - 8y_2^2$
(*e*) $p_0 = p_1 = 1$, $\alpha_{22} = -1$, $p_3 = -1$; $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$
(*f*) $p_0 = p_1 = 1$, $\alpha_{23} = -4$, $p_3 = -16$; $y_1^2 + 128y_2^2 - 128y_3^2$
(*g*) Vedere (*e*).
(*h*) $4y_1^2 - 16y_2^2 + 16y_3^2 + 12y_4^2$

31. Dimostrare che $q = x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2 - 3x_4^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_1x_4 + 13x_2x_3 - 11x_2x_4 + 9x_3x_4$ può venire ridotta in fattori.

CAPITOLO 18

Forme Hermitiane

LA FORMA DEFINITA dalla:

$$(18.1) \qquad h \;=\; \bar{X}'HX \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\bar{x}_i x_j, \qquad \bar{h}_{ij} \;=\; h_{ji}$$

in cui H è Hermitiana e le componenti di X sono nel campo dei numeri complessi, si dice forma Hermitiana. Il rango di H è chiamato rango della forma. Se il rango è $r<n$, la forma si dice singolare; altrimenti, non singolare.

Se H e X sono reali, la (18.1) è una forma quadratica reale; per questo troveremo che qui i teoremi sono analoghi a quelli del capitolo 17, e le loro dimostrazioni richiedono soltanto lievi variazioni rispetto a quelle di detto capitolo.

Poiché H è Hermitiana, ogni h_{ii} è reale, ed ogni $h_{ii}\bar{x}_i x_i$ è ancora reale. Inoltre, per la coppia di termini rettangolari $h_{ij}\bar{x}_i x_j$ e $h_{ji}\bar{x}_j x_i$,

$$h_{ij}\bar{x}_i x_j \;+\; h_{ji}\bar{x}_j x_i \;=\; h_{ij}\bar{x}_i x_j \;+\; \overline{h_{ij} x_i \bar{x}_j}$$

è reale. Perciò:

I. I valori di una forma Hermitiana sono reali.

La trasformazione lineare non singolare $X = BY$ porta la forma Hermitiana (18.1) in un'altra forma Hermitiana

$$(18.2) \qquad (\overline{BY})'H(BY) \;=\; \bar{Y}'(\bar{B}'HB)Y$$

Due forme Hermitiane nelle stesse variabili x_i si dicono equivalenti solo ed esclusivamente se esiste una trasformazione lineare non singolare $X = BY$ la quale, insieme alla $Y = IX$, porta una delle forme nell'altra. Poiché $\bar{B}'HB$ e H sono congiuntive, abbiamo:

II. Il rango di una forma Hermitiana è invariante per una trasformazione non singolare delle variabili.

III. Due forme Hermitiane sono equivalenti solo ed unicamente se le loro matrici sono congiuntive.

RIDUZIONE A FORMA CANONICA. Una forma Hermitiana (18.1), di rango r, può essere ridotta in forma diagonale:

$$(18.3) \qquad k_1\bar{y}_1 y_1 \;+\; k_2\bar{y}_2 y_2 \;+\; \cdots \;+\; k_r\bar{y}_r y_r, \qquad \text{essendo } k_i \neq 0 \text{ e reale}$$

per mezzo di una trasformazione lineare non singolare $X = BY$. Per la (18.2) la matrice B è un prodotto di matrici colonna elementari, mentre $\bar{B}'$ è il prodotto in ordine inverso delle matrici riga elementari coniugate.

Con un'altra trasformazione lineare la (18.3) si può ridurre alla forma canonica [vedere la (15.6)]:

$$(18.4) \qquad \bar{z}_1 z_1 \;+\; \bar{z}_2 z_2 \;+\; \cdots \;+\; \bar{z}_p z_p \;-\; \bar{z}_{p+1} z_{p+1} \;-\; \cdots \;-\; \bar{z}_r z_r$$

di indice p e sigla $p-(r-p)$. Anche qui p dipende dalla forma data, e non dalla trasformazione che riduce quella forma alla (18.4).

IV. Due forme Hermitiane, ciascuna nelle stesse n variabili, sono equivalenti solo ed unicamente se hanno lo stesso rango e lo stesso indice, ovvero lo stesso rango e la stessa sigla.

FORME DEFINITE E SEMI-DEFINITE. Una forma Hermitiana non singolare $h = \bar{X}'HX$ in n variabili si dice definita positiva se il suo rango e il suo indice sono uguali a n. Perciò una forma Hermitiana definita positiva si può ridurre a $\bar{y}_1 y_1 + \bar{y}_2 y_2 + \cdots + \bar{y}_n y_n$ e per ogni insieme non triviale di valori delle x avremo $h>0$.

Una forma Hermitiana singolare $h = \bar{X}'HX$ si dice semi-definita positiva se il suo rango e il suo indice sono uguali, ovvero $r = p < n$. Perciò una forma Hermitiana semi-definita positiva si può ridurre a $\bar{y}_1 y_1 + \bar{y}_2 y_2 + \cdots + \bar{y}_r y_r$, $r<n$, e per ogni insieme non triviale di valori delle x avremo $h \geq 0$.

La matrice H di una forma Hermitiana $\bar{X}'HX$ si chiama definita, o semi-definita positiva, a seconda che la forma sia definita positiva o semi-definita positiva.

V. Una forma Hermitiana è definita positiva solo ed unicamente se esiste una matrice non singolare C tale che $H = \bar{C}'C$.

VI. Se H è definita positiva, ogni minore principale di H è positivo, e viceversa.

VII. Se H è semi-definita positiva, ogni minore principale di H è non negativo, e viceversa.

PROBLEMI RISOLTI

1. Ridurre $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 2-3i \\ 1-2i & 5 & -4-2i \\ 2+3i & -4+2i & 13 \end{bmatrix}X$ nella forma canonica (18.4).

Dal Problema 7 del cap. 15,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+2i & 2-3i & 1 & 0 & 0 \\ 1-2i & 5 & -4-2i & 0 & 1 & 0 \\ 2+3i & -4+2i & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & i/\sqrt{10} \\ 0 & 0 & -1 & (-4-4i)/\sqrt{10} & i/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{array}\right]$$

Perciò la trasformazione lineare non singolare

$$X \;=\; BY \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{10} & (-4+4i)/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & -i/\sqrt{10} \\ 0 & -i/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} Y$$

riduce la forma Hermitiana data a $\bar{y}_1 y_1 + \bar{y}_2 y_2 - \bar{y}_3 y_3$.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

2. Ridurre a forma canonica ognuna delle seguenti:

(a) $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{bmatrix}X$ (c) $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1-3i & 2-3i \\ 1+3i & 1 & 2+3i \\ 2+3i & 2-3i & 4 \end{bmatrix}X$

(b) $\bar{X}'\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}X$ (d) $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 3-2i \\ 1+i & 0 & 2-i \\ 3+2i & 2+i & 4 \end{bmatrix}X$

Traccia: Per la (*b*): moltiplicare prima la seconda riga di H per i e sommarla alla prima riga.

Risp. (a) $X = \begin{bmatrix} 1 & (-1-2i)/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}Y$; $\bar{y}_1y_1 - \bar{y}_2y_2$

(b) $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}Y$; $\bar{y}_1y_1 - \bar{y}_2y_2$

(c) $X = \begin{bmatrix} 1 & (-1+3i)/3 & -1 \\ 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}Y$; $\bar{y}_1y_1 - \bar{y}_2y_2$

(d) $X = \begin{bmatrix} 1 & (-1+i)/\sqrt{2} & (-1+3i)/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & (-3-2i)/\sqrt{10} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{10} \end{bmatrix}Y$; $\bar{y}_1y_1 - \bar{y}_2y_2 - \bar{y}_3y_3$

3. Ricavare la trasformazione lineare $X = BY$ che, seguita dalla $Y = IX$, porta la (*a*) del Problema 2 in (*b*).

Risp. $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & (-1-2i)/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}Y$

4. Dimostrare che $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1+i & -1 \\ 1-i & 6 & -3+i \\ -1 & -3-i & 11 \end{bmatrix}X$ è definita positiva, e $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 3 & 5 \\ 1-2i & 5 & 10 \end{bmatrix}X$ è semi-definita positiva.

5. Dimostrare i Teoremi V-VII.

6. Ottenere, per delle forme Hermitiane, gli analoghi dei Teoremi XIX-XXI, cap. 17, per forme quadratiche.

7. Dimostrare: $\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \bar{x}_1 & h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ \bar{x}_2 & h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{x}_n & h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij}\bar{x}_i x_j$, in cui η_{ij} è il cofattore di h_{ij} in $H = |h_{ij}|$.

Traccia: Usare la (4.3).

CAPITOLO 19

Equazione caratteristica di una matrice

IL PROBLEMA. Sia $Y = AX$, in cui $A = [a_{ij}]$, $(i,j = 1,2,\ldots,n)$, una trasformazione lineare su F. In genere la trasformazione porta un vettore $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ in uno $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$ la cui unica connessione con X è attraverso la trasformazione stessa. Indagheremo qui se è possibile portare, per mezzo della trasformazione, dei vettori X in altri λX. Per λ s'intende uno scalare di F, o di qualche campo $\mathfrak{F}$ nel quale F è un sottocampo.

Ogni vettore X che con la trasformazione venga portato in λX, ovvero, ogni vettore X per cui

$$AX = \lambda X \tag{19.1}$$

si definisce vettore invariante rispetto alla trasformazione.

EQUAZIONE CARATTERISTICA. Dalla (19.1) si ottiene:

$$\lambda X - AX = (\lambda I - A)X = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \tag{19.2}$$

Il sistema di equazioni omogenee (19.2) ha delle soluzioni non triviali solo ed unicamente se

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{19.3}$$

Lo sviluppo di questo determinante fornisce un polinomio $\phi(\lambda)$ di grado n in λ, conosciuto come polinomio caratteristico della trasformazione, o della matrice A. L'equazione $\phi(\lambda) = 0$ si chiama equazione caratteristica di A, e le sue radici $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ radici caratteristiche di A. Se $\lambda = \lambda_i$ è una radice caratteristica, la (19.2) ha delle soluzioni non triviali che sono componenti di vettori invarianti, o caratteristici, associati (o corrispondenti) a detta radice.

Le radici caratteristiche sono anche conosciute come radici latenti o autovalori; i vettori caratteristici si dicono vettori latenti o autovettori.

Esempio 1. Determinare le radici caratteristiche, e i vettori invarianti associati, per $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

L'equazione caratteristica è $\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$

e radici caratteristiche sono: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$.

Quando $\lambda = \lambda_1 = 5$, la (19.2) diventa:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{o} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

poiché $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ è equivalente per righe a $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Una soluzione è data da $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; quindi, associato con la radice caratteristica $\lambda = 5$, si ha lo spazio vettoriale ad una dimensione misurato dal vettore $[1,1,1]'$. Ogni vettore $[k,k,k]'$ di questo spazio è un vettore invariante di A.

Quando è $\lambda = \lambda_2 = 1$, la (19.2) diventa:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{o} \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

Due soluzioni linearmente indipendenti sono $(2,-1,0)$ e $(1,0,-1)$. Perciò esiste, associato alla radice caratteristica $\lambda = 1$, lo spazio vettoriale a due dimensioni generato da $X_1 = [2,-1,0]'$ e $X_2 = [1,0,-1]'$. Ogni vettore $hX_1 + kX_2 = [2h+k,-h,-k]'$ è un vettore invariante di A.

Vedere i Problemi 1-2.

TEOREMI GENERALI. Nel Problema 3 dimostreremo un caso particolare $(k=3)$ del Teorema:

I. Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sono delle radici caratteristiche distinte di una matrice A, e se $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sono vettori invarianti non nulli rispettivamente associati a dette radici, i vettori X sono linearmente indipendenti.

Nel Problema 4 si dimostra un caso particolare $(n=3)$ del teorema:

II. La derivata k-ma di $\phi(\lambda) = |\lambda I - A|$ rispetto a λ, con A quadrata di ordine n, vale $k!$ volte la somma dei minori principali di ordine $n-k$ della matrice caratteristica se è $k<n$, vale invece $n!$ se $k=n$, mentre è 0 quando $k>n$.

Come conseguenza del Teorema **II**, si ha:

III. Se λ_i è una radice caratteristica r-ma di una matrice A quadrata di ordine n, il rango di $\lambda_i I - A$ è non inferiore a $n-r$ e la dimensione dello spazio vettoriale invariante associato è non superiore a r.

Vedere il Problema 5.

In particolare:

III'. Se λ_i è semplice radice caratteristica di una matrice quadrata A di ordine n, il rango di $\lambda_i I - A$ è $n-1$ e la dimensione dello spazio vettoriale invariante associato è 1.

Esempio 2. Per la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ dell'es. 1, l'equazione caratteristica è $\phi(\lambda) = (\lambda-5)(\lambda-1)^2 = 0$.

Il vettore invariante $[1,1,1]'$ associato alla radice caratteristica $\lambda = 5$ nonché i vettori invarianti linearmente indipendenti $[2,-1,0]'$ e $[1,0,-1]'$, associati alla radice multipla $\lambda=1$, sono un insieme linearmente indipendente (vedere il Teorema **I**).

Lo spazio vettoriale invariante associato alla radice caratteristica semplice $\lambda = 5$ ha dimensione 1. Lo spazio vettoriale invariante associato alla radice caratteristica $\lambda = 1$, di molteplicità 2, ha dimensione 2 (vedere i Teoremi **III** e **III'**).

Vedere anche il Problema 6.

Dato che ogni minore principale di A' è uguale al corrispondente minore principale di A, avremo, per la **(19.4)** del Problema 1,

IV. Le radici caratteristiche di A e A' sono le stesse.

Poiché ogni minore principale di $\bar{A}$ è il coniugato del corrispondente minore principale di A, abbiamo:

V. Le radici caratteristiche di $\bar{A}$ e $\bar{A}'$ sono le coniugate delle radici caratteristiche di A.

Confrontando le equazioni caratteristiche troviamo:

VI. Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sono le radici caratteristiche di una matrice A quadrata di ordine n, e se k è uno scalare, allora $k\lambda_1, k\lambda_2, \ldots, k\lambda_n$ sono le radici caratteristiche di kA.

VII. Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sono le radici caratteristiche di una matrice A quadrata di ordine n, e se k è uno scalare, $\lambda_1 - k, \lambda_2 - k, \ldots, \lambda_n - k$ sono le radici caratteristiche di $A - kI$.

Nel Problema 7 si dimostra:

VIII. Se α è una radice caratteristica di una matrice A non singolare, $|A|/\alpha$ è una radice caratteristica della agg A.

PROBLEMI RISOLTI

1. Se A è quadrata di ordine n, dimostrare che

$$\textbf{(19.4)} \qquad \phi(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + s_1\lambda^{n-1} + s_2\lambda^{n-2} + \ldots + s_{n-1}\lambda + (-1)^n|A|$$

in cui s_m, $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$ è $(-1)^m$ volte la somma di tutti i minori principali di A, quadrati di ordine m.

Riscriviamo la $|\lambda I - A|$ nella forma

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 - a_{12} & \ldots\ldots & 0 - a_{1n} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} & \ldots\ldots & 0 - a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 - a_{n1} & 0 - a_{n2} & \ldots\ldots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

e, poiché ogni elemento è un binomio, supponiamo che il determinante sia espresso come somma di 2^n determinanti, come risulta dal Teorema **VIII** del cap. 3. Uno di questi determinanti ha λ negli elementi diagonali, e zero negli altri: il suo valore è λ^n. Un altro è senza λ, ed ha valore $(-1)^n|A|$. I determinanti rimasti hanno m colonne di $-A$, $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$, e $n-m$ colonne, ciascuna delle quali contiene solo un elemento λ non nullo.

Consideriamo uno di questi determinanti, e supponiamo che le relative colonne numerate $i_1, i_2, \ldots, i_m$ siano colonne di $-A$.

Dopo un numero pari di scambi (contarli) di righe e di colonne adiacenti, il determinante diviene

$$(-1)^m \left|\begin{array}{cccc:cccc} a_{i_1,i_1} & a_{i_1,i_2} & \cdots & a_{i_1,i_m} & & & & \\ a_{i_2,i_1} & a_{i_2,i_2} & \cdots & a_{i_2,i_m} & & 0 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ a_{i_m,i_1} & a_{i_m,i_2} & \cdots & a_{i_m,i_m} & & & & \\ \hdashline & & & & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ a_{i_n,i_1} & a_{i_n,i_2} & \cdots & a_{i_n,i_m} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{array}\right| = (-1)^m \left|A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right| \lambda^{n-m}$$

in cui $\left|A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right|$ è un minore principale di A, quadrato di ordine m. Ora, è

$$s_m = (-1)^m \sum_{\rho} \left|A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right|$$

a seconda che $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ percorrano i valori delle $\rho = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\ 2\ \ldots\ m}$ differenti combinazioni di $1, 2, \ldots, n$, presi m alla volta.

2. Usare la (19.4) del Problema 1 per sviluppare $|\lambda I - A|$, essendo data $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

Abbiamo
$$s_1 = 1 + 0 - 2 + 6 = 5$$

$$s_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 8 - 3 + 2 - 5 + 16 - 9 = 9$$

$$s_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= -3 + 16 - 8 + 2 = 7$$

$$|A| = 2$$

Allora: $|\lambda I - A| = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2$.

3. Siano λ_1, X_1; λ_2, X_2; λ_3, X_3 delle radici caratteristiche distinte, nonché vettori invarianti associati di A. Dimostrare che X_1, X_2, X_3 sono linearmente indipendenti.

Poniamo che sia vero il contrario: che esistano cioè degli scalari a_1, a_2, a_3, non tutti nulli, tali che:

(i) $$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0$$

Moltiplichiamo la (i) per A, e ricordiamo che $AX_i = \lambda_i X_i$; abbiamo:

(ii) $$a_1 A X_1 + a_2 A X_2 + a_3 A X_3 = a_1\lambda_1 X_1 + a_2\lambda_2 X_2 + a_3\lambda_3 X_3 = 0$$

Moltiplichiamo la (ii) per A, e otterremo:

(iii) $$a_1\lambda_1^2 X_1 + a_2\lambda_2^2 X_2 + a_3\lambda_3^2 X_3 = 0$$

Ora, le (i), (ii), (iii) possono essere scritte così:

(iv) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 X_1 \\ a_2 X_2 \\ a_3 X_3 \end{bmatrix} = 0$$

Per il Problema 5 del cap. 3, $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \neq 0$; quindi esiste la B^{-1}. Moltiplicando la (iv) per B^{-1}, abbiamo $[a_1X_1, a_2X_2, a_3X_3]' = 0$. Ma questo richiede $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, contrariamente all'ipotesi assunta.

Perciò X_1, X_2, X_3 sono linearmente indipendenti.

4. Dalla $\phi(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$ si ottiene

$$\phi'(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{13} \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix}$$
= somma dei minori principali di $\lambda I - A$, di ordine due

$$\phi''(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{13} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2\{(\lambda - a_{11}) + (\lambda - a_{22}) + (\lambda - a_{33})\}$$
= 2! volte la somma dei minori principali di $\lambda I - A$ di ordine uno

$$\phi'''(\lambda) = 3!$$

E anche $\phi^{(iv)}(\lambda) = \phi^{(v)}(\lambda) = \ldots = 0$.

5. Dimostrare: Se λ_i è una radice caratteristica r-pla di una matrice A quadrata di ordine n, il rango di $\lambda_i I - A$ è non minore di $n - r$, e la dimensione dello spazio vettoriale invariante associato è non maggiore di r.

Poiché λ_i è una radice r-pla di $\phi(\lambda) = 0$, $\phi(\lambda_i) = \phi'(\lambda_i) = \phi''(\lambda_i) = \ldots = \phi^{(r-1)}(\lambda_i) = 0$ e $\phi^{(r)}(\lambda_i) \neq 0$.

Ora, $\phi^{(r)}(\lambda_i)$ è $r!$ volte la somma dei minori principali di ordine $n - r$ di $\lambda_i I - A$; quindi non tenderà a zero ogni minore principale, e $\lambda_i I - A$ è almeno di rango $n - r$. Per la (11.2), lo spazio vettoriale invariante associato di $\lambda_i I - A$, ovvero il suo spazio nullo, è al più di dimensione r.

6. Per la matrice del Problema 2, trovare le radici caratteristiche e gli spazi vettoriali invarianti associati.

Le radici caratteristiche sono: 1, 1, 1, 2.

Per $\lambda = 2$: $\lambda I - A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ è di rango 3; il suo spazio nullo ha dimensione 1. Lo spazio vettoriale invariante associato è quello generato da $[2, 3, -2, -3]'$.

Per $\lambda = 1$: $\lambda I - A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è di rango 3; il suo spazio nullo ha dimensione 1. Lo spazio vettoriale invariante associato è quello misurato da $[3, 6, -4, -5]'$.

7. Dimostrare che se α è una radice caratteristica non nulla della matrice A, quadrata di ordine n, non singolare, $|A|/\alpha$ è una radice caratteristica di agg A.

Per il Problema 1,

$$\text{(i)} \qquad \alpha^n + s_1\alpha^{n-1} + \ldots + s_{n-1}\alpha + (-1)^n|A| = 0$$

in cui s_i, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ è $(-1)^i$ volte la somma di tutti i minori principali di A, quadrati di ordine i, e

$$|\mu I - \text{agg}\, A| = \mu^n + S_1\mu^{n-1} + \ldots + S_{n-1}\mu + (-1)^n|\text{agg}\, A|$$

ove S_j, $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$, è $(-1)^j$ volte la somma dei minori principali, quadrati di ordine j, di agg A.

Per la **(6.4)** e per le definizioni di s_i e S_j, $S_1 = (-1)^n s_{n-1}$, $S_2 = (-1)^n|A|s_{n-2}$, ..., $S_{n-1} = (-1)^n|A|^{n-2}s_1$, e $|\text{agg}\, A| = |A|^{n-1}$; allora:

$$|\mu I - \text{agg}\, A| = (-1)^n\{(-1)^n\mu^n + s_{n-1}\mu^{n-1} + s_{n-2}|A|\mu^{n-2} + \ldots + s_2|A|^{n-3}\mu^2 + s_1|A|^{n-2}\mu + |A|^{n-1}\}$$

e

$$|A|^{1-n}|\mu I - \text{agg}\, A| = (-1)^n\{1 + s_1(\frac{\mu}{|A|}) + \ldots + s_{n-1}(\frac{\mu}{|A|})^{n-1} + (-1)^n(\frac{\mu}{|A|})^n|A|\} = f(\mu)$$

Ora,

$$f(\frac{|A|}{\alpha}) = (-1)^n\{1 + s_1(\frac{1}{\alpha}) + \ldots + s_{n-1}(\frac{1}{\alpha})^{n-1} + (-1)^n(\frac{1}{\alpha})^n|A|\}$$

e per la (i)

$$\alpha^n f(\frac{|A|}{\alpha}) = (-1)^n\{\alpha^n + s_1\alpha^{n-1} + \ldots + s_{n-1}\alpha + (-1)^n|A|\} = 0$$

Quindi $|A|/\alpha$ è una radice caratteristica di agg A.

8. Dimostrare che l'equazione caratteristica di una matrice ortogonale P è una equazione reciproca.

Abbiamo:

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - P| = |\lambda PIP' - P| = |-P\lambda(\frac{1}{\lambda}I - P')| = \pm\lambda^n|\frac{1}{\lambda}I - P| = \pm\lambda^n\phi(\frac{1}{\lambda})$$

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

9. Determinare per le seguenti matrici le radici caratteristiche, e una base per ciascuno degli spazi vettoriali invarianti associati.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -3 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{bmatrix}$

(k) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (l) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & -10 & 7 \\ -5 & -4 & 9 & -6 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ -3 & -3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ (m) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

Risp. (a) 1, $[1, -1, 0]'$; 2, $[2, -1, -2]'$; 3, $[1, -1, -2]'$
(b) -1, $[1, 0, 1]'$; 2, $[1, 3, 1]'$; 1, $[3, 2, 1]'$
(c) 1, $[1, 1, -1]'$; 2, $[2, 1, 0]'$;
(d) 1, $[1, 1, 1]'$

(e) 2, $[2, -1, 0]'$; 0, $[4, -1, 0]'$; 1, $[4, 0, -1]'$
(f) 0, $[3, -1, 0]'$; 1, $[12, -4, -1]'$
(g) 1, $[1, 0, -1]'$, $[0, 1, -1]'$; 3, $[1, 1, 0]'$
(h) 0, $[1, -1, 0]'$; 1, $[0, 0, 1]'$; 4, $[1, 1, 0]'$
(i) -1, $[0, 1, -1]'$; i, $[1+i, 1, 1]'$; $-i$, $[1-i, 1, 1]'$
(j) 2, $[1, 0, 1]'$; $1+i$, $[0, 1, 0]'$; $2-2i$, $[1, 0, -1]'$
(k) 1, $[1, 0, -1, 0]'$, $[1, -1, 0, 0]'$; 2, $[-2, 4, 1, 2]'$; 3, $[0, 3, 1, 2]'$
(l) 1, $[1, 2, 3, 2]'$; -1, $[-3, 0, 1, 4]'$
(m) 0, $[2, 1, 0, 1]'$; 1, $[3, 0, 1, 4]'$; -1, $[3, 0, 1, 2]'$

10. Dimostrare che se X è un vettore unitario, e se $AX = \lambda X$ è $X'AX = \lambda$.

11. Dimostrare: Le radici caratteristiche di una matrice diagonale sono gli elementi della sua diagonale, e i vettori invarianti associati sono i vettori elementari E_i.

12. Dimostrare i Teoremi I e VI.

13. Dimostrare il Teorema VII.

Traccia: Se $|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$, allora: $|(\lambda + k)I - A| = (\lambda + k - \lambda_1)(\lambda + k - \lambda_2)\ldots(\lambda + k - \lambda_n)$.

14. Dimostrare che le radici caratteristiche della somma diretta, diag$(A_1, A_2, \ldots, A_s)$, sono le radici caratteristiche di $A_1, A_2, \ldots, A_s$.

15. Si dimostri che se A e $N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sono quadrate di ordine n, e $r < n$, NA e AN hanno la stessa equazione caratteristica.

16. Dimostrare che se la matrice quadrata A di ordine n è di rango r, almeno $n - r$ delle sue radici caratteristiche sono zero.

17. Dimostrare che se A e B sono quadrate di ordine n e A è non singolare, $A^{-1}B$ e BA^{-1} hanno le stesse radici caratteristiche.

18. Per le A e B del Problema 17, dimostrare che B e $A^{-1}BA$ hanno le stesse radici caratteristiche.

19. Sia A una matrice quadrata di ordine n. Scrivere $|\lambda I - A^{-1}| = |-\lambda A^{-1}(\frac{1}{\lambda}I - A)|$ e concludere che $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \ldots, 1/\lambda$ sono le radici caratteristiche di A^{-1}.

20. Dimostrare che le radici caratteristiche di una matrice ortogonale P hanno valore assoluto 1.

Traccia: Se λ_i, X_i sono una radice caratteristica e un vettore invariante associato di P, allora $X_i'X_i = (PX_i)'(PX_i) = \bar{\lambda}_i\lambda_i X_i'X_i$.

21. Dimostrare: Se $\lambda_i \neq \pm 1$ è una radice caratteristica, e X_i il vettore invariante associato di una matrice ortogonale P, è allora $X_i'X_i = 0$.

22. Dimostrare che le radici caratteristiche di una matrice unitaria hanno valore assoluto 1.

23. Ottenere con il Teorema II:

$\phi(0) = (-1)^n|A|$

$\phi'(0) = (-1)^{n-1}$ volte la somma dei minori principali di ordine $n-1$ di A

. . . .

$\phi^{(r)}(0) = (-1)^{n-r}r!$ volte la somma dei minori principali di ordine $n - r$ di A

. . . .

$\phi^{(n)}(0) = n!$

24. Sostituendo i valori del Problema 23 nella:

$$\phi(\lambda) = \phi(0) + \phi'(0)\cdot\lambda + \frac{1}{2!}\phi''(0)\cdot\lambda^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\phi^{(n)}(0)\cdot\lambda^n$$

ottenere la **(19.4)**.

CAPITOLO 20

Similitudine

DUE MATRICI QUADRATE A e B di ordine n su F si dicono simili sullo stesso campo se su di esso esiste una matrice R non singolare tale che

$$(20.1) \qquad B = R^{-1}AR$$

Esempio 1. La matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ dell'Esempio 1, cap. 19, e la

$$B = R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sono simili.

L'equazione caratteristica $(\lambda-5)(\lambda-1)^2 = 0$ di B è anche equazione caratteristica di A.

Un vettore invariante di B associato con $\lambda = 5$ è $Y_1 = [1, 0, 0]'$ e si dimostra rapidamente che $X_1 = RY_1 = [1, 1, 1]'$ è un vettore invariante di A associato alla stessa radice caratteristica $\lambda = 5$. Il lettore dimostri che $Y_2 = [7, -2, 0]'$ e $Y_3 = [17, -3, -2]'$ sono una coppia di vettori di B invarianti, linearmente indipendenti, associati con $\lambda = 1$; $X_2 = RY_2$ e $X_3 = RY_3$ sono invece una coppia di vettori di A invarianti, linearmente indipendenti, associati alla stessa radice $\lambda = 1$.

L'Esempio 1 illustra i seguenti teoremi:

I. Due matrici simili hanno le stesse radici caratteristiche.

Per una dimostrazione vedere il Problema 1.

II. Se Y è un vettore invariante di $B = R^{-1}AR$ e corrisponde alla radice caratteristica λ_i di B, $X = RY$ è un vettore invariante di A e corrisponde alla stessa radice caratteristica λ_i di A.

Per una dimostrazione, vedere il Problema 2.

MATRICI DIAGONALI. Le radici caratteristiche di una matrice diagonale $D = \text{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sono gli stessi elementi diagonali.

Una matrice diagonale ha sempre n vettori invarianti linearmente indipendenti. I vettori elementari E_i costituiscono un insieme simile, dato che $DE_i = a_iE_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Come conseguenza abbiamo (vedere i Problemi 3 e 4 per le dimostrazioni):

III. Ogni matrice quadrata A di ordine n, simile ad una matrice diagonale, ha n vettori invarianti linearmente indipendenti.

IV. Se una matrice A, quadrata di ordine n, ha n vettori invarianti linearmente indipendenti, essa è simile ad una matrice diagonale.

Vedere il Problema 5.

Nel Problema 6 si dimostra:

V. Su di un campo F una matrice quadrata A di ordine n è simile ad una matrice diagonale solo ed unicamente se $\lambda I - A$ si riduce completamente in fattori nel campo F, e se la molteplicità di ogni λ_i è uguale alla dimensione dello spazio nullo di $\lambda_i I - A$.

Non sempre una matrice quadrata di ordine n è simile a una matrice diagonale. La matrice del Problema 6, cap. 19, è un esempio, dove, in corrispondenza alla tripla radice $\lambda = 1$, lo spazio nullo di $\lambda I - A$ ha dimensione 1.

Possiamo tuttavia dimostrare:

VI. Ogni matrice quadrata A di ordine n è simile a una matrice triangolare i cui elementi diagonali sono le radici caratteristiche di A.

Vedere i Problemi 7-8.

Abbiamo, come casi particolari:

VII. Se A è una qualsiasi matrice quadrata reale di ordine n con radici caratteristiche reali, esiste una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}AP = P'AP$ è triangolare, ed ha come elementi diagonali le radici caratteristiche di A.

Vedere i Problemi 9-10.

VIII. Se A è una qualsiasi matrice quadrata di ordine n ad elementi complessi, o una matrice quadrata di ordine n, reale con radici caratteristiche complesse, esiste una matrice unitaria U tale che $U^{-1}AU = \bar{U}'AU$ è triangolare, ed ha come elementi diagonali le radici caratteristiche di A.

Vedere il Problema 11.

Le matrici A e $P^{-1}AP$ del Teorema **VII** si dicono ortogonalmente simili.

Le matrici A e $U^{-1}AU$ del Teorema **VIII** si dicono unitariamente simili.

MATRICI DIAGONALIZZABILI. Una matrice A, simile ad una matrice diagonale, si chiama diagonalizzabile. Il Teorema **IV** è fondamentale per lo studio, che si farà nel prossimo capitolo, di alcuni tipi di matrici diagonalizzabili.

PROBLEMI RISOLTI

1. Dimostrare che due matrici simili hanno le stesse matrici caratteristiche.

Siano A e $B = R^{-1}AR$ le matrici simili; allora:

$$(i) \qquad \lambda I - B = \lambda I - R^{-1}AR = R^{-1}\lambda IR - R^{-1}AR = R^{-1}(\lambda I - A)R$$

e

$$|\lambda I - B| = |R^{-1}|\cdot|\lambda I - A|\cdot|R| = |\lambda I - A|$$

Perciò A e B hanno la stessa equazione caratteristica e le stesse radici caratteristiche.

2. Dimostrare che se Y è un vettore invariante di $B = R^{-1}AR$ corrispondente alla radice caratteristica λ_i, $X = RY$ è un vettore invariante di A e corrisponde alla stessa radice caratteristica λ_i di A.

Per ipotesi è $BY = \lambda_i Y$ e $RB = AR$; allora:

$$AX = ARY = RBY = R\lambda_i Y = \lambda_i RY = \lambda_i X$$

ed X è un vettore invariante di A, corrispondente alla radice caratteristica λ_i.

3. Dimostrare che ogni matrice A che sia simile ad una matrice diagonale ha n vettori invarianti, linearmente indipendenti.

Sia $R^{-1}AR = \text{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = B$. Ora, i vettori elementari $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sono vettori invarianti di B. Allora, per il Teorema **II**, i vettori $X_j = RE_j$ sono vettori invarianti di A. Poiché R è non singolare, i suoi vettori colonna sono linearmente indipendenti.

4. Dimostrare che se una matrice quadrata A di ordine n ha n vettori invarianti linearmente indipendenti, essa è simile ad una matrice diagonale.

Gli n vettori invarianti linearmente indipendenti $X_1, X_2, \ldots, X_n$ siano associati alle rispettive radici caratteristiche $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ in modo che $AX_i = \lambda_i X_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Sia $R = [X_1, X_2, \ldots, X_n]$; allora

$$AR = [AX_1, AX_2, \ldots, AX_n] = [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \ldots, \lambda_n X_n]$$

$$= [X_1, X_2, \ldots, X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = R \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Quindi $R^{-1}AR = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

5. Un insieme di vettori invarianti linearmente indipendenti della matrice A nell'Esempio 1, cap. 19, è:

$$X_1 = [1, 1, 1]', \quad X_2 = [2, -1, 0]', \quad X_3 = [1, 0, -1]'$$

Prendiamo $R = [X_1, X_2, X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; allora $R^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, e

$$R^{-1}AR = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ che è una matrice diagonale.

6. Dimostrare: Su un campo F, una matrice A quadrata di ordine n è simile ad una matrice diagonale solo ed esclusivamente se $\lambda I - A$ si riduce completamente a fattori in F, e la molteplicità di ogni λ_i è uguale alla dimensione dello spazio nullo di $\lambda_i I - A$.

Poniamo dapprima che sia $R^{-1}AR = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = B$, e che esattamente k di queste radici caratteristiche siano uguali a λ_i. Allora $\lambda_i I - B$ ha esattamente k zeri nella diagonale, ed è quindi di rango $n-k$; il suo spazio nullo allora ha dimensione $n-(n-k) = k$. Ma $\lambda_i I - A = R(\lambda_i I - B)R^{-1}$; perciò $\lambda_i I - A$ ha lo stesso rango $n-k$ e la stessa nullità k di $\lambda_i I - B$.

Reciprocamente, siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ le radici caratteristiche distinte di A, con rispettive molteplicità $r_1, r_2, \ldots, r_s$, essendo $r_1 + r_2 + \ldots + r_s = n$. Indichiamo con $V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_s}$ gli spazi vettoriali invarianti associati. Assumiamo $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ir_i}$ come base dello spazio vettoriale invariante V_{r_i}, $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Supponiamo che esistano degli scalari a_{ij}, non tutti zero, tali che

(i) $$(a_{11}X_{11} + a_{12}X_{12} + \ldots + a_{1r_1}X_{1r_1}) + (a_{21}X_{21} + a_{22}X_{22} + \ldots + a_{2r_2}X_{2r_2}) + \ldots + (a_{s1}X_{s1} + a_{s2}X_{s2} + \ldots + a_{sr_s}X_{sr_s}) = 0$$

Ora, ogni vettore $Y_i = a_{i1}X_{i1} + a_{i2}X_{i2} + \ldots + a_{ir_i}X_{ir_i}) = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$, perché altrimenti è un vettore invariante e per il Teorema **I** la loro totalità è linearmente indipendente. Ma ciò contraddice la (i), perciò le X costituiscono una base di V_n, e per il Teorema **IV** A è simile ad una matrice diagonale.

7. Dimostrare che ogni matrice quadrata A di ordine n è simile ad una matrice triangolare i cui elementi diagonali sono le radici caratteristiche di A.

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ le radici caratteristiche di A, e sia X_1 un vettore invariante di A corrispondente alla radice caratteristica λ_1. Prendiamo X_1 come prima colonna di una matrice non singolare Q_1, le cui restanti colonne possono essere qualsiasi, purché $|Q_1| \neq 0$. La prima colonna di AQ_1 è $AX_1 = \lambda_1 X_1$, mentre la prima colonna di $Q_1^{-1}AQ_1$ è $Q_1^{-1}\lambda_1 X_1$.
Ma questa, quale prima colonna di $Q_1^{-1}\lambda_1 Q_1$, vale $[\lambda_1, 0, \ldots, 0]'$. Perciò,

(i) $$Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

in cui A_1 è di ordine $n-1$.

Poiché $|\lambda I - Q_1^{-1}AQ_1| = (\lambda - \lambda_1)|\lambda I - A_1|$, e $Q_1^{-1}AQ_1$ ha le stesse radici caratteristiche di A, ne segue che le radici caratteristiche di A_1 sono $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Se $n = 2$, è $A_1 = [\lambda_2]$ e con $Q = Q_1$ il teorema è dimostrato.

In altro modo, sia X_2 un vettore invariante di A_1 corrispondente alla radice caratteristica λ_2. Prendiamo X_2 come prima colonna di una matrice non singolare Q_2, le cui restanti colonne possono essere qualsiasi, purché $|Q_2| \neq 0$. Allora

(ii) $$Q_2^{-1}A_1Q_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

in cui A_2 è di ordine $n-2$. Se $n = 3$, $A_2 = [\lambda_3]$, e il teorema è dimostrato con $Q = Q_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$.

Altrimenti possiamo ripetere il procedimento, e dopo $n-1$ passi al più otteniamo

(iii) $$Q = Q_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{bmatrix}$$

tale che $Q^{-1}AQ$ è triangolare ed ha come elementi diagonali le radici caratteristiche di A.

8. Trovare una matrice Q non singolare tale che $Q^{-1}AQ$ sia triangolare, data

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 8 & -9 \\ 6 & -1 & 5 & -5 \\ -5 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Qui è $|\lambda I - A| = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4)$, e le radici caratteristiche sono $1, -1, 2, -2$. Prendiamo $[5, 5, -1, 3]'$, vettore invariante che corrisponde alla radice caratteristica 1, come prima colonna di una matrice non singolare Q_1; le restanti colonne di questa sono dei vettori elementari, diciamo:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Allora

$$Q_1^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q_1^{-1}AQ_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & -1 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & -15 & 20 \\ 0 & 4 & -12 & 16 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

Una radice caratteristica di A_1 è -1, e un vettore invariante associato è $[4, 0, -1]'$. Prendiamo

$Q_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; allora:

$$Q_2^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q_2^{-1}A_1Q_2 = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -20 & -15 & 20 \\ 0 & -48 & 64 \\ 0 & -11 & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Una radice caratteristica di A_2 è 2, e un vettore invariante associato è $[8, 11]'$. Prendiamo

$Q_3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$; allora

$$Q_3^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q_3^{-1}A_2Q_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2/5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ora,

$$Q = Q_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & -1 & 11 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q^{-1} = \frac{1}{160}\begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & 40 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 20 & 0 \\ -180 & 40 & -220 & 160 \end{bmatrix}$$

e

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 & -9/5 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

9. Se A è una matrice quadrata di ordine n, reale, con radici caratteristiche reali, esiste una matrice P ortogonale tale che $P^{-1}AP$ è triangolare, ed ha come elementi diagonali le radici caratteristiche di A.

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ le radici caratteristiche di A. Poiché le radici sono reali, i vettori invarianti associati saranno ugualmente reali. Come nel Problema 7, sia formata la Q_1 con un vettore invariante, corrispondente a λ_1, per prima colonna. Con il procedimento Gram-Schmidt otteniamo dalla Q_1 una matrice ortogonale P_1 la cui prima colonna è proporzionale a quella di Q_1. Allora

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

in cui A_1 è di ordine $n-1$, ed ha $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ per radici caratteristiche.

Costruiamo poi una Q_2 che abbia per prima colonna un vettore invariante di A_1 corrispondente alla radice λ_2 ed otteniamo, con il procedimento Gram-Schmidt, una matrice ortogonale P_2. Allora:

$$P_2^{-1}A_1P_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Dopo le necessarie ripetizioni, ricaviamo la matrice ortogonale

$$P = P_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

per cui $P^{-1}AP$ è triangolare, con le radici caratteristiche di A per elementi diagonali.

10. Trovare una matrice ortogonale P tale che

$$P^{-1}AP = P^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}P$$

sia triangolare, ed abbia le radici caratteristiche di A per elementi diagonali.

Dall'Esempio 1 del cap. 19, le radici caratteristiche sono 5, 1, 1, e un vettore invariante che corrisponde a $\lambda = 1$ è $[1, 0, -1]'$.

Assumiamo $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e, usando il procedimento Gram-Schmidt, otteniamo

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

matrice ortogonale la cui prima colonna è proporzionale a $[1, 0, -1]'$.

Troviamo

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

Ora, A_1 ha radice caratteristica $\lambda = 1$ e $[1, -\sqrt{2}]'$ come vettore invariante associato. Dalla $Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ si ottiene con il procedimento Gram-Schmidt la matrice ortogonale $P_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$. Allora

$$P = P_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

è ortogonale e $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

11. Trovare una matrice unitaria U tale che $U^{-1}AU$ sia triangolare ed abbia come elementi diagonali le radici caratteristiche di A, che è data:

$$A = \begin{bmatrix} 5+5i & -1+i & -6-4i \\ -4-6i & 2-2i & 6+4i \\ 2+3i & -1+i & -3-2i \end{bmatrix}$$

L'equazione caratteristica di A è $\lambda(\lambda^2 + (-4-i)\lambda + 5 - i) = 0$ e le radici caratteristiche sono $0,\ 1-i,\ 3+2i$. Per $\lambda = 0$, prendiamo $[1, -1, 1]'$ come vettore invariante associato e formiamo la $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Il procedimento Gram-Schmidt ci dà la matrice unitaria

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Ora,

$$U_1^{-1}AU_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2}(1-i) & -(26+24i)/\sqrt{6} \\ 0 & 1-i & (2+3i)/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3+2i \end{bmatrix}$$

così che, per la Q_1 scelta, troviamo che la matrice richiesta è $U = U_1$.

12. Trovare una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}AP$ sia triangolare, ed abbia come elementi diagonali le radici caratteristiche di A, che è data:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Le radici caratteristiche sono 2, 3, 6, e per vettori invarianti associati si possono prendere rispettivamente $[1, 0, -1]'$, $[1, 1, 1]'$, $[1, -2, 1]'$. Ora, questi tre vettori sono linearmente indipendenti e mutuamente ortogonali. Assumendo:

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

troviamo $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(2, 3, 6)$. Ciò suggerisce il più accurato studio della matrice simmetrica reale che viene fatto nel prossimo capitolo.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

13. Si trovi una matrice ortogonale P tale che la $P^{-1}AP$ sia triangolare, ed abbia come elementi diagonali le radici caratteristiche di A per ciascuna delle matrici del Problema 9 (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), cap. 19.

Risp. (*a*) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & -4/3\sqrt{2} & 1/3 \end{bmatrix}$, (*c*) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

(*b*) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, (*d*) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

14. Spiegare perché le matrici (*a*) e (*b*) del Problema 13 sono simili ad una matrice diagonale, mentre le (*c*) e (*d*) non lo sono. Esaminare le matrici (*a*) – (*m*) del Problema 9, cap. 19, e determinare quali fra le suddette sono simili ad una matrice diagonale avente le radici caratteristiche come elementi diagonali.

15. Per ciascuna delle matrici A del Problema 9 (*i*), (*j*) del cap. 19 trovare una matrice unitaria U tale che $U^{-1}AU$ sia triangolare, ed abbia come elementi diagonali le radici caratteristiche di A.

Risp. (*i*) $\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -(1+i)/2 \\ 1/\sqrt{2} & (1-i)/2\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ -1/\sqrt{2} & (1-i)/2\sqrt{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, (*j*) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

16. Dimostrare che se A è reale simmetrica, e P è ortogonale, $P^{-1}AP$ è reale e simmetrica.

17. Con le opportune modifiche del Problema 9, dimostrare il Teorema **VIII**.

18. Siano B_i e C_i delle matrici simili per $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Dimostrare che

$$B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_m) \quad \text{e} \quad C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, \ldots, C_m)$$

sono simili. *Traccia:* Supponiamo $C_i = R_i^{-1} B_i R_i$ e formiamo $R = \mathrm{diag}(R_1, R_2, \ldots, R_m)$.

19. Siano $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2)$ e $C = \mathrm{diag}(B_2, B_1)$. Scriviamo $I = \mathrm{diag}(I_1, I_2)$, in cui gli ordini I_1 e I_2 sono rispettivamente quelli di B_1 e B_2 e definiamo $R = \begin{bmatrix} 0 & I_1 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix}$. Dimostrare che $R^{-1}BR = C$ provando così che B e C sono simili.

20. Estendere il risultato del Problema 19 alla $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ e alla C, matrice qualsiasi ottenuta riordinando gli elementi B_i sulla diagonale.

21. Se A e B sono quadrate di ordine n, le AB e BA hanno le stesse radici caratteristiche.
Traccia: Sia $PAQ = N$; allora $PABP^{-1} = NQ^{-1}BP^{-1}$ e $Q^{-1}BAQ = Q^{-1}BP^{-1}N$. Vedere il Problema 15 del cap. 19.

22. Se $A_1, A_2, \ldots, A_s$ sono non singolari e dello stesso ordine, dimostrare che $A_1A_2 \ldots A_s$, $A_2A_3 \ldots A_sA_1$, $A_3 \ldots A_sA_1A_2$, ... hanno la stessa equazione caratteristica.

23. Sia $Q^{-1}AQ = B$ in cui B è triangolare ed ha come elementi diagonali le radici caratteristiche $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ di A.
(*a*) Dimostrare che $Q^{-1}A^kQ$ è triangolare, ed ha come elementi diagonali le potenze *k*-me delle radici caratteristiche di A.
(*b*) Dimostrare che $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = \mathrm{tr}\, A^k$.

24. Dimostrare che la similitudine è una relazione di equivalenza.

25. Dimostrare che $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ hanno le stesse radici caratteristiche ma non sono simili.

CAPITOLO 21

Similitudine con una matrice diagonale

MATRICI SIMMETRICHE REALI. Lo studio delle matrici simmetriche reali e delle matrici Hermitiane può esser fatto contemporaneamente; qui però le tratteremo separatamente. Per matrici simmetriche reali abbiamo:

I. Le radici caratteristiche di una matrice simmetrica reale sono tutte reali.
Vedere il Problema 1.

II. I vettori invarianti associati a radici caratteristiche distinte di una matrice simmetrica reale sono mutuamente ortogonali.
Vedere il Problema 2.

Quando A è reale e simmetrica, ogni B_i del Problema 9, cap. 20, è 0; quindi:

III. Se A è una matrice simmetrica, quadrata di ordine n, reale, con radici caratteristiche $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, esiste una matrice ortogonale reale P tale che $P'AP = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Il Teorema **III** implica:

IV. Se λ_i è radice caratteristica con molteplicità r_i di una matrice simmetrica reale, esiste uno spazio invariante, con dimensioni r_i associato a λ_i.

In termini di una forma quadratica reale, il Teorema **III** diventa:

V. Ogni forma quadratica reale $q = X'AX$ può essere ridotta, con una trasformazione ortogonale $X = BY$ ad una forma canonica

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2 \tag{21.1}$$

in cui r è il rango di A, e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ le radici caratteristiche non nulle.

Perciò il rango di q è il numero di radici caratteristiche non nulle di A, mentre l'indice è il numero di radici caratteristiche positive, oppure, per la regola dei segni di Cartesio, il numero di variazioni di segno in $|\lambda I - A| = 0$.

VI. Una matrice simmetrica reale è definita positiva solo ed esclusivamente se tutte le sue radici caratteristiche sono positive.

SIMILITUDINE ORTOGONALE. Se P è una matrice ortogonale, e $B = P^{-1}AP$, si dice che B è ortogonalmente simile ad A. Dato che $P^{-1} = P'$, B è anche ortogonalmente congruente, ed ortogonalmente equivalente ad A. Si può riformulare così il Teorema **III**:

VII. Ogni matrice simmetrica reale A è ortogonalmente simile ad una matrice diagonale i cui elementi diagonali sono le radici caratteristiche di A.
Vedere il Problema 3.

Le radici caratteristiche della matrice simmetrica reale A siano ordinate in modo da aversi $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Allora $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ è un'unica matrice diagonale simile ad A. La totalità di simili matrici diagonali costituisce un insieme canonico per matrici simmetriche reali in similitudine ortogonale. Avremo:

VIII. Due matrici simmetriche reali sono ortogonalmente simili solo ed unicamente se hanno le stesse radici caratteristiche, cioè se sono simili.

COPPIE DI FORME QUADRATICHE REALI. Nel Problema 4 si dimostra:

IX. Se $X'AX$ e $X'BX$ sono delle forme quadratiche reali in $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, e se $X'BX$ è definita positiva, esiste una trasformazione lineare non singolare reale $X = CY$ che porta $X'AX$ in

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

e $X'BX$ in

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

essendo le λ_i radici di $|\lambda B - A| = 0$. Vedere anche i Problemi 4-5.

MATRICI HERMITIANE. Per confronto con i teoremi sulle matrici simmetriche reali, abbiamo:

X. Le radici caratteristiche di una matrice Hermitiana sono reali.

Vedere il Problema 7.

XI. I vettori invarianti associati a radici caratteristiche distinte di una matrice Hermitiana sono mutuamente ortogonali.

XII. Se H è una matrice Hermitiana, quadrata di ordine n con radici caratteristiche $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, esiste una matrice unitaria U tale che $\bar{U}'HU = U^{-1}HU = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. La matrice H viene detta unitariamente simile a $U^{-1}HU$.

XIII. Se λ_i è una radice caratteristica di molteplicità r_i della matrice Hermitiana H, esiste, associato a λ_i, uno spazio invariante di dimensione r_i.

Le radici caratteristiche della matrice Hermitiana H siano ordinate in modo che $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n$. Allora $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ è un'unica matrice diagonale simile ad H. La totalità di simili matrici diagonali costituisce un insieme canonico per matrici Hermitiane unitariamente simili. Ne segue:

XIV. Due matrici Hermitiane sono unitariamente simili solo ed esclusivamente se hanno le stesse radici caratteristiche, ovvero solo nel caso che siano simili.

MATRICI NORMALI. Una matrice quadrata A di ordine n si dice normale se $A\bar{A}' = \bar{A}'A$. Le matrici normali comprendono quelle diagonali, le simmetriche reali, le emisimmetriche reali, le ortogonali, le Hermitiane, le anti-Hermitiane e le unitarie.

A sia una matrice normale, ed U una matrice unitaria; scriviamo $B = \bar{U}'AU$. Allora $\bar{B}' = \bar{U}'\bar{A}'U$ e $\bar{B}'B = \bar{U}'\bar{A}'U \cdot \bar{U}'AU = \bar{U}'\bar{A}'AU = \bar{U}'A\bar{A}'U = \bar{U}'AU \cdot \bar{U}'\bar{A}'U = B\bar{B}'$. Perciò:

XV. Se A è una matrice normale, e U una matrice unitaria, $B = \bar{U}'AU$ è una matrice normale.

Nel Problema 8 dimostriamo:

XVI. Se X_i è un vettore invariante, corrispondente alla radice caratteristica λ_i di una matrice normale A, esso è anche un vettore invariante di $\bar{A}'$ corrispondente alla radice caratteristica $\bar{\lambda}_i$.

Nel Problema 9 si dimostra:

XVII. Una matrice quadrata A è unitariamente simile ad una matrice diagonale solo ed esclusivamente se A è normale.

E come conseguenza avremo:

XVIII. Se A è normale, i vettori invarianti corrispondenti a radici caratteristiche distinte sono ortogonali.

Vedere il Problema 10.

XIX. Se λ_i è una radice caratteristica di molteplicità r_i di una matrice normale A, lo spazio vettoriale invariante associato ha dimensione r_i.

XX. Due matrici normali sono unitariamente simili solo ed esclusivamente se hanno le stesse radici caratteristiche, ovvero, se sono simili.

PROBLEMI RISOLTI

1. Dimostrare che le radici caratteristiche di una matrice A simmetrica, reale, quadrata di ordine n, sono tutte reali.

Supponiamo che $h+ik$ sia una radice caratteristica complessa di A. Consideriamo

$$B = \{(h+ik)I - A\}\{(h-ik)I - A\} = (hI-A)^2 + k^2 I$$

che è reale e singolare, essendo singolare $(h+ik)I - A$. Esiste un vettore reale X non nullo tale che $BX = 0$ e quindi:

$$X'BX = X'(hI-A)^2X + k^2X'X = X'(hI-A)'(hI-A)X + k^2X'X = 0$$

Il vettore $(hI-A)X$ è reale; allora $\{(hI-A)X\}'\{(hI-A)X\} \geqq 0$. E' anche $X'X > 0$. Perciò $k = 0$ e non vi sono radici complesse.

2. Dimostrare che i vettori invarianti associati con delle radici caratteristiche distinte di una matrice A simmetrica reale sono mutuamente ortogonali.

Siano X_1 e X_2 dei vettori invarianti, rispettivamente associati alle radici caratteristiche distinte λ_1 e λ_2 di A. Allora:

$$AX_1 = \lambda_1 X_1 \quad \text{e} \quad AX_2 = \lambda_2 X_2, \quad \text{e pure} \quad X_2'AX_1 = \lambda_1 X_2'X_1 \quad \text{e} \quad X_1'AX_2 = \lambda_2 X_1'X_2$$

Prendendo le trasposte:

$$X_1'AX_2 = \lambda_1 X_1'X_2 \quad \text{e} \quad X_2'AX_1 = \lambda_2 X_2'X_1$$

Allora $\lambda_1 X_1'X_2 = \lambda_2 X_1'X_2$ e, poiché $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $X_1'X_2 = 0$. Perciò X_1 e X_2 sono ortogonali.

3. Trovare una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale ed abbia come elementi diagonali le radici caratteristiche di A, che è data:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

L'equazione caratteristica è

$$\begin{vmatrix} \lambda-7 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-10 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda-7 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 24\lambda^2 + 180\lambda - 432 = 0$$

e le radici caratteristiche sono 6, 6, 12.

Per $\lambda = 6$, abbiamo $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$ o $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$; scegliamo come vettori invarianti associati la coppia mutuamente ortogonale $X_1 = [1, 0, -1]'$ e $X_2 = [1, 1, 1]'$. Quando $\lambda = 12$, prendiamo $X_3 = [1, -2, 1]'$ per vettore invariante associato.

Ponendo la forma normalizzata di questi vettori come colonne di P, abbiamo

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Come esercizio, si dimostri inoltre che $P^{-1}AP = \text{diag}(6, 6, 12)$.

4. Dimostrare: Se $X'AX$ e $X'BX$ sono forme quadratiche reali in $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, e se $X'BX$ è definita positiva, esiste una trasformazione lineare non singolare reale $X = CY$ che porta $X'AX$ in $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$, e $X'BX$ in $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$, essendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ le radici di $|\lambda B - A| = 0$.

Per il Teorema **VII** esiste una trasformazione ortogonale $X = GV$ che porta $X'BX$ in

(i) $$V'(G'BG)V = \mu_1 v_1^2 + \mu_2 v_2^2 + \ldots + \mu_n v_n^2$$

in cui $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sono le radici caratteristiche (tutte positive) di B.

Sia $H = \text{diag}(1/\sqrt{\mu_1}, 1/\sqrt{\mu_2}, \ldots, 1/\sqrt{\mu_n})$. Allora $V = HW$ trasforma la (i) in

(ii) $$W'(H'G'BGH)W = w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_n^2$$

Ora, per la forma quadratica reale $W'(H'G'AGH)W$ esiste una trasformazione ortogonale $W = KY$ che la trasforma in

$$Y'(K'H'G'AGHK)Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

essendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ le radici caratteristiche di $H'G'AGH$. Esiste perciò una trasformazione non singolare reale $X = CY = GHKY$ che porta $X'AX$ in $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$ e $X'BX$ in

$$Y'(K'H'G'BGHK)Y = Y'(K^{-1}IK)Y = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

Dal momento che, per tutti i valori di λ,

$$\begin{aligned} K'H'G'(\lambda B - A)GHK = \lambda K'H'G'BGHK - K'H'G'AGHK &= \text{diag}(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda) - \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \\ &= \text{diag}(\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \ldots, \lambda - \lambda_n) \end{aligned}$$

ne segue che $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sono le radici di $|\lambda B - A| = 0$

5. Dal Problema 3, la trasformazione lineare

$$X = (GH)W = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix} W$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{3} & 1/3\sqrt{2} & 1/6\sqrt{2} \\ 0 & 1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{3} & 1/3\sqrt{2} & 1/6\sqrt{2} \end{bmatrix} W$$

porta la $q = X'BX = X' \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} X$ in $W'IW$.

La stessa trasformazione porta

$$X'AX = X' \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} X \quad \text{in} \quad W' \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} W$$

Poiché questa è una matrice diagonale, la trasformazione $W = KY$ del Problema 4 è la trasformazione identica $W = IY$.

Perciò la trasformazione lineare reale $X = CY = (GH)Y$ trasporta la forma quadratica definita positiva $X'BX$ in $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ e la forma quadratica $X'AX$ in $\frac{1}{3}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2$. Si lascia per esercizio di dimostrare che $|\lambda B - A| = 36(3\lambda - 1)(2\lambda - 1)^2$.

6. Dimostrare che ogni matrice A reale non singolare può essere scritta come $A = CP$, dove C è definita positiva, simmetrica, e P è ortogonale.

Poiché A è non singolare, AA' è simmetrica, definita positiva, per il Teorema **X** del cap. 17. Esiste allora una matrice ortogonale Q tale che $Q^{-1}AA'Q = \text{diag}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = B$, essendo ogni $k_i > 0$. Definiamo $B_1 = \text{diag}(\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2}, \ldots, \sqrt{k_n})$ e $C = QB_1Q^{-1}$. Ora, C è definita positiva simmetrica, ed è

$$C^2 = QB_1Q^{-1}QB_1Q^{-1} = QB_1^2Q^{-1} = QBQ^{-1} = AA'$$

Definiamo $P = C^{-1}A$. Allora $PP' = C^{-1}AA'C^{-1} = C^{-1}C^2C^{-1} = I$ e P è ortogonale. Perciò $A = CP$, con C simmetrica definita positiva, e P è ortogonale come si doveva dimostrare.

7. Dimostrare che le radici caratteristiche di una matrice Hermitiana sono reali.

Sia λ_i una radice caratteristica della matrice Hermitiana H. Esiste allora un vettore X_i non nullo tale che $HX_i = \lambda_i X_i$. Ora, $\bar{X}_i' H X_i = \lambda_i \bar{X}_i' X_i$ è reale e differente da zero, e tale anche è la trasposta coniugata $\bar{X}_i' H X_i = \bar{\lambda}_i \bar{X}_i' X_i$. Perciò $\lambda_i = \lambda_i$ e λ_i è reale.

8. Dimostrare: Se X_i è un vettore invariante, corrispondente ad una radice caratteristica λ_i di una matrice normale, X_i è anche un vettore invariante di $\bar{A}'$, corrispondente alla radice caratteristica $\bar{\lambda}_i$.

Poiché A è normale,

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)(\overline{\lambda I - A})' &= (\lambda I - A)(\bar{\lambda} I - \bar{A}') = \lambda\bar{\lambda} I - \lambda\bar{A}' - \bar{\lambda} A + A\bar{A}' \\ &= \bar{\lambda}\lambda I - \lambda\bar{A}' - \bar{\lambda} A + \bar{A}'A = (\overline{\lambda I - A})'(\lambda I - A) \end{aligned}$$

così che $\lambda I - A$ è normale. Per ipotesi è $BX_i = (\lambda_i I - A)X_i = 0$; allora

$$(\overline{BX_i})'(BX_i) = \bar{X}_i'\bar{B}' \cdot BX_i = \bar{X}_i' B \cdot \bar{B}' X_i = (\overline{\bar{B}'X_i})'(\bar{B}'X_i) = 0 \quad \text{e} \quad \bar{B}'X_i = (\bar{\lambda}_i I - \bar{A}')X_i = 0$$

Perciò X_i è un vettore invariante di $\bar{A}'$, corrispondente alla radice caratteristica $\bar{\lambda}_i$.

9. Dimostrare che una matrice quadrata A di ordine n è unitariamente simile ad una matrice diagonale solo ed esclusivamente se A è normale.

Supponiamo che A sia normale. Per il Teorema **VIII** del cap. 20, esiste una matrice unitaria U tale che

$$\bar{U}'AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & b_{23} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = B$$

Per il Teorema **XV**, B è normale, così che $\bar{B}'B = B\bar{B}'$. Ora l'elemento della prima riga, prima colonna di $\bar{B}'B$ è $\bar{\lambda}_1\lambda_1$ mentre il corrispondente elemento di $B\bar{B}'$ è

$$\lambda_1\bar{\lambda}_1 + b_{12}\bar{b}_{12} + b_{13}\bar{b}_{13} + \ldots + b_{1n}\bar{b}_{1n}$$

Giacché questi elementi sono uguali, ed è ogni $b_{1j}\bar{b}_{1j} \geq 0$, concludiamo che ogni $b_{1j} = 0$. Continuando con gli elementi corrispondenti della seconda riga, seconda colonna, . . ., concludiamo che ogni b_{ij} di B è zero. Perciò, $B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Reciprocamente, poniamo che A sia diagonale; allora A è normale.

10. Dimostrare che se A è normale, i vettori invarianti che corrispondono a radici caratteristiche distinte sono ortogonali.

Siano λ_1, X_1 e λ_2, X_2 radici caratteristiche distinte e vettori invarianti associati di A. Allora $AX_1 = \lambda_1 X_1$, $AX_2 = \lambda_2 X_2$ e per il Problema 8: $\bar{A}'X_1 = \bar{\lambda}_1 X_1$, $\bar{A}'X_2 = \bar{\lambda}_2 X_2$. Ora, $\bar{X}_2' A X_1 = \lambda_1 \bar{X}_2' X_1$ e, prendendo la trasposta coniugata, $\bar{X}_1' \bar{A}' X_2 = \bar{\lambda}_1 \bar{X}_1' X_2$. Ma $\bar{X}_1' \bar{A}' X_2 = \bar{\lambda}_2 \bar{X}_1' X_2$. Perciò $\bar{\lambda}_1 \bar{X}_1' X_2 = \bar{\lambda}_2 \bar{X}_1' X_2$ e, dato che $\bar{\lambda}_1 \neq \bar{\lambda}_2$, $\bar{X}_1' X_2 = 0$, come era da dimostrare.

11. Consideriamo la conica $x_1^2 - 12x_1x_2 - 4x_2^2 = 40$, ovvero

(i)
$$X'AX \quad = \quad X'\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} X \quad = \quad 40$$

riferita agli assi coordinati ortogonali OX_1 e OX_2.

L'equazione caratteristica di A è

$$|\lambda I - A| \quad = \quad \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 6 \\ 6 & \lambda + 4 \end{vmatrix} \quad = \quad (\lambda - 5)(\lambda + 8) \quad = \quad 0$$

Per le radici caratteristiche $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -8$, prendiamo rispettivamente $[3, -2]'$ e $[2, 3]'$ come vettori invarianti associati. Formiamo ora la matrice ortogonale $P = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}$ le cui colonne sono i due vettori normalizzati. La trasformazione $X = PY$ riduce (i) a

$$Y'\begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} Y \quad = \quad Y'\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} Y \quad = \quad 5y_1^2 - 8y_2^2 \quad = \quad 40$$

La conica è un'iperbole.

A parte il procedimento, questa è la familiare rotazione degli assi in geometria analitica piana, per ottenere l'eliminazione del termine rettangolare nell'equazione di una conica. Si noti che, per il Teorema VII, il risultato è noto non appena sono determinate le radici caratteristiche.

12. Un problema di geometria analitica solida è quello di ridurre, tramite traslazione e rotazioni di assi, l'equazione di una quadrica alla forma più semplice. Compito primario è di localizzare il centro e determinare le direzioni principali, cioè la direzione degli assi dopo la rotazione. Senza tentare di giustificare i passaggi, mostriamo qui il ruolo di due matrici in questa riduzione dell'equazione di una quadrica a centro.

Consideriamo la superficie $3x^2 + 2xy + 2xz + 4yz - 2x - 14y + 2z - 9 = 0$, e le matrici simmetriche

$$A \quad = \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B \quad = \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

formate rispettivamente dai soli termini di secondo grado, e da tutti insieme.

L'equazione caratteristica di A è:

$$|\lambda I - A| \quad = \quad \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -2 \\ -1 & -2 & \lambda \end{bmatrix} \quad = \quad 0$$

Le radici caratteristiche e i vettori invarianti unitari associati sono:

$$\lambda_1 = 1, \quad v_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right]'; \qquad \lambda_2 = 4, \quad v_2 = \left[\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]'; \qquad \lambda_3 = -2, \quad v_3 = \left[0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]'$$

Usando soltanto le trasformazioni elementari di riga $H_j(k)$ e $H_{ij}(k)$, con $j \neq 4$,

$$B \quad = \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -7 & 1 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

Considerando B_1 quale matrice incrementata del sistema di equazioni $\begin{cases} 3x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2z - 7 = 0, \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$

troviamo dalla D_1 la soluzione $x = -1$, $y = 0$, $z = 4$ ovvero $C(-1, 0, 4)$. Da D_2 abbiamo $d = -4$.

Il rango di A è 3, e 4 il rango di B; la quadrica ha come centro $C(-1, 0, 4)$. L'equazione ridotta che cerchiamo è

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + d \quad = \quad X^2 + 4Y^2 - 2Z^2 - 4 \quad = \quad 0$$

Le equazioni della traslazione sono $x = x' - 1$, $y = y'$, $z = z' + 4$.

Direzioni principali sono v_1, v_2, v_3. Indichiamo con E l'inversa di $[v_1, v_2, v_3]$. Le equazioni di rotazione degli assi nelle direzioni principali sono

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad = \quad [X \ Y \ Z] \cdot E \quad = \quad [X \ Y \ Z]\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

13. Trovare, per ciascuna delle seguenti matrici A simmetriche reali, una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale ed abbia come elementi diagonali le radici caratteristiche di A.

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad (d) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad (e) \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Risp. (a) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

14. Trovare una trasformazione lineare che riduca $X'BX$ a $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ e $X'AX$ a $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$, dove λ_i sono le radici di $|\lambda B - A| = 0$, ed essendo date

$$(a) \ A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (b) \ A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Risp. (a) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 1/3 \\ 0 & -2/3\sqrt{2} & 1/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 1/3 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3\sqrt{10} \\ -2/3 & 1/3 & 2/3\sqrt{10} \\ 1/3 & -2/3 & 2/3\sqrt{10} \end{bmatrix}$

15. Dimostrare il Teorema **IV**.

Traccia: Se $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n)$, allora $P^{-1}(\lambda_1 I - A)P = \text{diag}(0, 0, \ldots, 0, \lambda_1 - \lambda_{r+1}, \lambda_1 - \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_1 - \lambda_n)$ è di rango $n - r$.

16. Modificare il ragionamento del Problema 2 e dimostrare il Teorema **XI**.

17. Dimostrare i Teoremi **XII, XIII, XIX**.

18. Identificare ciascun luogo:

(*a*) $20x_1^2 - 24x_1x_2 + 27x_2^2 = 369$, (*c*) $108x_1^2 - 312x_1x_2 + 17x_2^2 = 900$,

(*b*) $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 4$, (*d*) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 8$

19. Sia A reale ed emisimmetrica. Dimostrare:

(*a*) Ogni radice caratteristica di A, o è zero o è un immaginario puro.

(*b*) $I + A$ è non singolare; lo stesso per $I - A$.

(*c*) $B = (I+A)^{-1}(I-A)$ è ortogonale. (Vedere il Problema 35, cap. 13).

20. Dimostrare che se A è normale e non singolare, così è anche A^{-1}.

21. Dimostrare che se A è normale, essa è simile ad A'.

22. Dimostrare che una matrice quadrata A è normale solo ed esclusivamente se può essere espressa come $H + iK$, in cui H e K sono matrici Hermitiane commutabili.

23. Se A è quadrata di ordine n, con radici caratteristiche $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, essa è normale solo ed unicamente se le radici caratteristiche di $A\bar{A}'$ sono $\lambda_1\bar{\lambda}_1, \lambda_2\bar{\lambda}_2, \ldots, \lambda_n\bar{\lambda}_n$.

Traccia: Scrivere $U^{-1}AU = T = [t_{ij}]$, con U unitaria e T triangolare. Ora, $\text{tr}(T\bar{T}') = \text{tr}(A\bar{A}')$ richiede che sia $t_{ij} = 0$ per $i \neq j$.

24. Dimostrare che se A è non singolare, $A\bar{A}'$ è Hermitiana definita positiva. Formulare di nuovo il teorema per A reale e non singolare.

25. Dimostrare che se A e B sono quadrate di ordine n e normali, e se A e $\bar{B}'$ commutano, AB e BA sono normali.

26. Funzione caratteristica della matrice quadrata A di ordine n sia:

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$$

e poniamo che esista una matrice P non singolare tale che

$$(1) \qquad P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1 I_{r_1}, \lambda_2 I_{r_2}, \ldots, \lambda_s I_{r_s})$$

Chiamiamo B_i, $(i = 1, 2, \ldots, s)$, la matrice quadrata di ordine n $\text{diag}(0, 0, \ldots, 0, I_{r_i}, 0, \ldots, 0)$ che si ottiene sostituendo λ_i con 1 e λ_j, $(j \neq i)$, con 0 al secondo membro della (*1*); definiamo altresì

$$E_i = PB_iP^{-1}, \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

Dimostrare che:

(*a*) $P^{-1}AP = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_s B_s$.

(*b*) $A = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_s E_s$.

(*c*) Ogni E_i è idempotente.

(*d*) $E_i E_j = 0$ per $i \neq j$.

(*e*) $E_1 + E_2 + \ldots + E_s = I$.

(*f*) Il rango di E_i è dato dalla molteplicità della radice caratteristica λ_i.

(*g*) $(\lambda_i I - A)E_i = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

(*h*) Se $p(x)$ è un polinomio in x, allora $p(A) = p(\lambda_1)E_1 + p(\lambda_2)E_2 + \ldots + p(\lambda_s)E_s$.

Traccia: Porre $A^2 = \lambda_1^2 E_1 + \lambda_2^2 E_2 + \ldots + \lambda_s^2 E_s$, $A^3 = \lambda_1^3 E_1 + \lambda_2^3 E_2 + \ldots + \lambda_s^3 E_s$, ...

(*i*) Ogni E_i è un polinomio in A.

Traccia: Definire $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_s)$ e $f_i(\lambda) = f(\lambda)/(\lambda - \lambda_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Allora $f_i(A) = f_i(\lambda_i)E_i$.

(*j*) Una matrice B commuta con A solo ed unicamente se commuta con ogni E_i.

Traccia: Se B commuta con A, essa commuta con ogni polinomio in A.

(*k*) Se A è normale, ogni E_i è Hermitiana.

(*l*) Se A è non singolare, allora

$$A^{-1} = \lambda_1^{-1}E_1 + \lambda_2^{-1}E_2 + \ldots + \lambda_s^{-1}E_s$$

(*m*) Se A è Hermitiana definita positiva,

$$H = A^{1/2} = \sqrt{\lambda_1}E_1 + \sqrt{\lambda_2}E_2 + \ldots + \sqrt{\lambda_s}E_s$$

è Hermitiana definita positiva.

(*n*) L'equazione in (*b*) si chiama decomposizione spettrale di A. Dimostrare che essa è unica.

27. (*a*) Ricavare la decomposizione spettrale

$$A = \begin{bmatrix} 24 & -20 & 10 \\ -20 & 24 & -10 \\ 10 & -10 & 9 \end{bmatrix} = 49\begin{bmatrix} 4/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 4/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 5/9 & 4/9 & -2/9 \\ 4/9 & 5/9 & 2/9 \\ -2/9 & 2/9 & 8/9 \end{bmatrix}$$

(*b*) Ricavare

$$A^{-1} = \frac{1}{196}\begin{bmatrix} 29 & 20 & -10 \\ 20 & 29 & 10 \\ -10 & 10 & 44 \end{bmatrix}.$$

(*c*) Ricavare

$$A^{1/2} = \begin{bmatrix} 38/9 & -20/9 & 10/9 \\ -20/9 & 38/9 & -10/9 \\ 10/9 & -10/9 & 23/9 \end{bmatrix}$$

28. Dimostrare che se A è normale e commuta con B, allora $\bar{A}'$ e B commutano.

Traccia: Servirsi del Problema 26(*j*).

29. Dimostrare che se A è non singolare esistono una matrice unitaria U e una matrice Hermitiana H definita positiva tali che $A = HU$.

Traccia: Definire H come $H^2 = A\bar{A}'$, e $U = H^{-1}A$.

30. Dimostrare che se A è non singolare, essa è normale solo ed esclusivamente se le H ed U del Problema 29 commutano.

31. Dimostrare: La matrice quadrata A è simile ad una matrice diagonale solo ed unicamente se esiste una matrice Hermitiana H definita positiva tale che $H^{-1}AH$ sia normale.

32. Dimostrare che una matrice simmetrica reale (Hermitiana) è idempotente solo ed esclusivamente se le sue radici caratteristiche sono altrettanti 0 e 1.

33. Dimostrare che se A è simmetrica reale (Hermitiana) e idempotente, vale la $r_A = \text{tr}\,A$.

34. A sia normale; $B = I + A$ sia singolare, e $C = B^{-1}\bar{B}'$.
Dimostrare: (*a*) A e $(\bar{B}')^{-1}$ commutano; (*b*) C è unitaria.

35. Dimostrare che se H è Hermitiana, $(I + iH)^{-1}(I - iH)$ è unitaria.

36. Se A è quadrata di ordine n, l'insieme di numeri $\bar{X}'AX$, con X vettore unità, costituisce il campo di valori di A. Dimostrare:

(*a*) Le radici caratteristiche di A si trovano nel suo campo di valori.

(*b*) Ogni elemento diagonale di A, ed ogni elemento diagonale di $U^{-1}AU$, con U unitaria, si trova nel campo di valori di A.

(*c*) Se A è simmetrica reale (Hermitiana), ogni elemento nel suo campo di valori è reale.

(*d*) Se A è simmetrica reale (Hermitiana), il suo campo di valori è l'insieme di $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_n$ reali; λ_1 è la più piccola, λ_n la più grande radice caratteristica di A.

CAPITOLO 22

Polinomi su un campo

DOMINIO POLINOMIALE SU F. Indichi λ un simbolo astratto (indeterminato), commutabile per ipotesi con se stesso e con gli elementi di un campo F. L'espressione

$$(22.1) \qquad f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\lambda^0$$

nella quale le a_i sono in F, si chiama polinomio in λ su F.

Se per ogni a_i è $a_i = 0$, la (22.1) si chiama polinomio zero, e scriveremo $f(\lambda) = 0$. Se $a_n \neq 0$, la (22.1) si dice di grado n, e a_n si definisce suo coefficiente dominante. Il polinomio $f(\lambda) = a_0\lambda^0 = a_0 \neq 0$ si dice di grado zero; il grado del polinomio zero non è definito.

Se nella (22.1) è $a_n = 1$, il polinomio è chiamato monico.

Due polinomi in λ che contengono gli stessi termini, a parte quelli di coefficiente zero, si dicono uguali.

La totalità dei polinomi (22.1) si chiama dominio polinomiale $F[\lambda]$ su F.

SOMMA E PRODOTTO. Considerando i singoli polinomi di $F[\lambda]$ come elementi di un sistema numerico, il dominio polinomiale ha la maggior parte – ma non tutte – delle proprietà di un campo. Per esempio

$$f(\lambda) + g(\lambda) = g(\lambda) + f(\lambda) \quad \text{e} \quad f(\lambda)\cdot g(\lambda) = g(\lambda)\cdot f(\lambda)$$

Se $f(\lambda)$ è di grado m, e $g(\lambda)$ di grado n,

(i) $f(\lambda) + g(\lambda)$ è di grado m quando $m>n$, al più di grado m quando $m=n$, e di grado n quando $m<n$.

(ii) $f(\lambda)\cdot g(\lambda)$ è di grado $m+n$.

Se $f(\lambda) \neq 0$ mentre $f(\lambda)\cdot g(\lambda) = 0$, è allora $g(\lambda) = 0$.

Se $g(\lambda) \neq 0$ e $h(\lambda)\cdot g(\lambda) = k(\lambda)\cdot g(\lambda)$, allora $h(\lambda) = k(\lambda)$.

QUOZIENTI. Nel Problema 1 si dimostra

I. Se $f(\lambda)$ e $g(\lambda) \neq 0$ sono dei polinomi in $F[\lambda]$, esistono, sempre in $F[\lambda]$, due unici polinomi, $h(\lambda)$ e $r(\lambda)$ e di essi $r(\lambda)$ è il polinomio zero, oppure è di grado inferiore a quello di $g(\lambda)$. Essi sono tali che

$$(22.2) \qquad f(\lambda) = h(\lambda)\cdot g(\lambda) + r(\lambda)$$

Qui $r(\lambda)$ si chiama resto della divisione di $f(\lambda)$ per $g(\lambda)$. Se $r(\lambda) = 0$, si dice che $g(\lambda)$ divide $f(\lambda)$; $g(\lambda)$ e $h(\lambda)$ si chiamano in tal caso fattori di $f(\lambda)$.

Sia $f(\lambda) = h(\lambda)\cdot g(\lambda)$. Quando $g(\lambda)$ è di grado zero, ovvero, quando $g(\lambda) = c$ costante, la riduzione in fattori si dice triviale. Un polinomio non costante su F si chiama irriducibile su F se la sua unica riduzione in fattori è triviale.

Esempio 1. Sul campo razionale λ^2-3 è irriducibile; sul campo reale invece è riducibile in fattori come $(\lambda+\sqrt{3})(\lambda-\sqrt{3})$. Sul campo reale (e di qui sul razionale) λ^2+4 è irriducibile; sul complesso invece è riducibile in fattori come $(\lambda+2i)(\lambda-2i)$.

TEOREMA DEL RESTO. Sia $f(\lambda)$ un polinomio qualsiasi, e $g(\lambda) = \lambda - a$. Allora la (22.2) diventa

$$(22.3) \qquad f(\lambda) = h(\lambda)\cdot(\lambda - a) + r$$

con r libero da λ. Per la (22.3) è $f(a) = r$, e abbiamo:

II. Quando $f(\lambda)$ viene diviso per $\lambda - a$ fino ad ottenere un resto libero da λ, quel resto è $f(a)$.

III. Un polinomio $f(\lambda)$ ha $\lambda - a$ come fattore solo ed unicamente se $f(a) = 0$.

MASSIMO COMUNE DIVISORE. Se $h(\lambda)$ divide sia $f(\lambda)$ che $g(\lambda)$, esso viene chiamato divisore comune di $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$.

Un polinomio di $d(\lambda)$ si chiama massimo comune divisore di $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ se:

(i) $d(\lambda)$ è monico,

(ii) $d(\lambda)$ è divisore comune di $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$,

(iii) ogni divisore comune di $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ è un divisore di $d(\lambda)$.

Nel Problema 2 dimostriamo:

IV. Se $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ sono dei polinomi in $F[\lambda]$, e non sono entrambi il polinomio zero, essi hanno un unico massimo comune divisore $d(\lambda)$, ed esistono in $F[\lambda]$ dei polinomi $h(\lambda)$ e $k(\lambda)$ tali che

$$(22.4) \qquad d(\lambda) = h(\lambda)\cdot f(\lambda) + k(\lambda)\cdot g(\lambda)$$

Vedere anche il Problema 3.

Quando i soli divisori comuni di $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ sono costanti, il loro massimo comune divisore è $d(\lambda) = 1$.

Esempio 2. Il massimo comune divisore di $f(\lambda) = (\lambda^2+4)(\lambda^2+3\lambda+5)$ e $g(\lambda) = (\lambda^2-1)(\lambda^2+3\lambda+5)$ è $\lambda^2+3\lambda+5$. e la (22.4) diventa

$$\lambda^2 + 3\lambda + 5 = \tfrac{1}{5}f(\lambda) - \tfrac{1}{5}g(\lambda)$$

Abbiamo anche $(1-\lambda^2)\cdot f(\lambda) + (\lambda^2+4)\cdot g(\lambda) = 0$. Ciò illustra il teorema:

V. Se il massimo comune divisore di $f(\lambda)$ con grado $n>0$ e $g(\lambda)$ con grado $m>0$ è diverso da 1, esistono dei polinomi non nulli $a(\lambda)$ di grado $<m$ e $b(\lambda)$ di grado $<n$ tali che

$$a(\lambda)\cdot f(\lambda) + b(\lambda)\cdot g(\lambda) = 0$$

e viceversa.

Vedere il Problema 4.

POLINOMI RELATIVAMENTE PRIMI. Due polinomi si dicono relativamente primi se il loro massimo comune divisore è 1.

VI. Se $g(\lambda)$ è irriducibile in $F[\lambda]$ e $f(\lambda)$ è un polinomio sempre di $F[\lambda]$, allora: o $g(\lambda)$ divide $f(\lambda)$, o $g(\lambda)$ è primo relativamente a $f(\lambda)$.

VII. Se $g(\lambda)$ è irriducibile, ma divide $f(\lambda)\cdot h(\lambda)$, divide almeno uno degli $f(\lambda)$, $h(\lambda)$.

VIII. Se $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ sono relativamente primi, e ciascuno divide $h(\lambda)$, lo stesso vale per $f(\lambda)\cdot g(\lambda)$.

RIDUZIONE UNICA IN FATTORI. Nel Problema 5 si dimostra:

IX. Ogni polinomio non nullo $f(\lambda)$ di $F[\lambda]$ si può scrivere come

$$f(\lambda) = c\cdot q_1(\lambda)\cdot q_2(\lambda)\ldots q_r(\lambda) \tag{22.5}$$

in cui $c \neq 0$ è costante, e le $q_i(\lambda)$ sono dei polinomi monici irriducibili di $F[\lambda]$.

PROBLEMI RISOLTI

1. Dimostrare: Se $f(\lambda)$ e $g(\lambda)\neq 0$ sono polinomi in $F[\lambda]$, esistono, sempre in $F[\lambda]$, i polinomi unici $h(\lambda)$ e $r(\lambda)$ ed $r(\lambda)$ è il polinomio zero o ha grado inferiore a quello di $g(\lambda)$. Essi sono tali che

$$\text{(i)}\qquad f(\lambda) = h(\lambda)\cdot g(\lambda) + r(\lambda)$$

Sia

$$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

e

$$g(\lambda) = b_m\lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0, \qquad b_m \neq 0$$

Evidentemente il teorema è vero per $f(\lambda) = 0$, o se $n < m$. Poniamo che sia $n \geq m$; allora

$$f(\lambda) - \frac{a_n}{b_m}\lambda^{n-m}g(\lambda) = f_1(\lambda) = c_p\lambda^p + c_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + c_0$$

o è il polinomio zero, o è di grado minore di quello di $f(\lambda)$.

Se $f_1(\lambda) = 0$, o se è di grado minore di quello di $g(\lambda)$, abbiamo dimostrato il teorema con $h(\lambda) = \frac{a_n}{b_m}\lambda^{n-m}$ e $r(\lambda) = f_1(\lambda)$. Altrimenti, possiamo formare

$$f(\lambda) - \frac{a_n}{b_m}\lambda^{n-m}g(\lambda) - \frac{c_p}{b_m}\lambda^{p-m}g(\lambda) = f_2(\lambda)$$

Di nuovo, se $f_2(\lambda) = 0$ o se è di grado minore di quello di $g(\lambda)$, abbiamo dimostrato il teorema. Se no, ripetiamo il procedimento. Poiché ad ogni passaggio il grado del resto (assunto $\neq 0$) viene ridotto, raggiungiamo finalmente un resto $r(\lambda) = f_s(\lambda)$ che sarà o il polinomio zero, o un polinomio di grado inferiore a quello di $g(\lambda)$.

Per provare l'unicità, poniamo:

$$f(\lambda) = h(\lambda)\cdot g(\lambda) + r(\lambda) \quad \text{e} \quad f(\lambda) = k(\lambda)\cdot g(\lambda) + s(\lambda)$$

dove i gradi di $r(\lambda)$ e $s(\lambda)$ sono più piccoli di quello di $g(\lambda)$. Allora:

$$h(\lambda)\cdot g(\lambda) + r(\lambda) = k(\lambda)\cdot g(\lambda) + s(\lambda)$$

e

$$[k(\lambda) - h(\lambda)]g(\lambda) = r(\lambda) - s(\lambda)$$

Ora, $r(\lambda) - s(\lambda)$ è di grado minore di m, mentre a meno che non sia $k(\lambda) - h(\lambda) = 0$, $[k(\lambda) - h(\lambda)]g(\lambda)$ è di grado uguale o maggiore di m. Perciò, $k(\lambda) - h(\lambda) = 0$, $r(\lambda) - s(\lambda) = 0$ così che $k(\lambda) = h(\lambda)$ e $r(\lambda) = s(\lambda)$. Allora, sia $h(\lambda)$ che $r(\lambda)$ sono unici.

2. Si dimostri: Se $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ sono dei polinomi in $F[\lambda]$, non entrambi zero, essi hanno un unico massimo comune divisore $d(\lambda)$, ed esistono dei polinomi $h(\lambda)$ e $k(\lambda)$ in F tali che

$$(a)\qquad d(\lambda) = h(\lambda)\cdot f(\lambda) + k(\lambda)\cdot g(\lambda)$$

Se è, diciamo, $f(\lambda) = 0$, allora $d(\lambda) = b_m^{-1}g(\lambda)$, essendo b_m il coefficiente dominante di $g(\lambda)$; e otteniamo la (a) per $h(\lambda) = 1$ e $k(\lambda) = b_m^{-1}$.

Poniamo adesso che il grado di $g(\lambda)$ non sia maggiore di quello di $f(\lambda)$. Per il Teorema I abbiamo

$$\text{(i)}\qquad f(\lambda) = q_1(\lambda)\cdot g(\lambda) + r_1(\lambda)$$

in cui $r_1(\lambda) = 0$, o di grado minore di quello di $g(\lambda)$. Se $r_1(\lambda) = 0$, allora $d(\lambda) = b_m^{-1}g(\lambda)$, e si ottiene la (a) con $h(\lambda) = 0$ e $k(\lambda) = b_m^{-1}$.

Se $r_1(\lambda) \neq 0$, abbiamo

$$\text{(ii)}\qquad g(\lambda) = q_2(\lambda)\cdot r_1(\lambda) + r_2(\lambda)$$

con $r_2(\lambda) = 0$, o di grado minore di quello di $r_1(\lambda)$. Se è $r_2(\lambda) = 0$, avremo dalla (i):

$$r_1(\lambda) = f(\lambda) - q_1(\lambda)\cdot g(\lambda)$$

dalla quale si ottiene (a) dividendo per il coefficiente dominante di $r_1(\lambda)$.

Per $r_2(\lambda) \neq 0$, abbiamo

$$\text{(iii)}\qquad r_1(\lambda) = q_3(\lambda)\cdot r_2(\lambda) + r_3(\lambda)$$

in cui $r_3(\lambda) = 0$, o di grado minore di quello di $r_2(\lambda)$. Se è $r_3(\lambda) = 0$, avremo dalle (i) e (ii):

$$\begin{aligned} r_2(\lambda) &= g(\lambda) - q_2(\lambda)\cdot r_1(\lambda) = g(\lambda) - q_2(\lambda)[f(\lambda) - q_1(\lambda)\cdot g(\lambda)] \\ &= -q_2(\lambda)\cdot f(\lambda) + [1 + q_1(\lambda)\cdot q_2(\lambda)]g(\lambda) \end{aligned}$$

dalla quale si ottiene la (a) dividendo per il coefficiente dominante $r_2(\lambda)$.

Continuando il procedimento nell'ipotesi che ogni nuovo resto sia differente da zero, avremo in generale:

$$\text{(iv)}\qquad r_i(\lambda) = q_{i+2}(\lambda)\cdot r_{i+1}(\lambda) + r_{i+2}(\lambda)$$

detto procedimento deve inoltre concludersi con

$$\text{(v)}\qquad r_{s-2}(\lambda) = q_s(\lambda)\cdot r_{s-1}(\lambda) + r_s(\lambda), \qquad r_s(\lambda) \neq 0$$

e

$$\text{(vi)}\qquad r_{s-1}(\lambda) = q_{s+1}(\lambda)\cdot r_s(\lambda)$$

Per la (vi), $r_s(\lambda)$ divide $r_{s-1}(\lambda)$, e per la (v) divide anche $r_{s-2}(\lambda)$. Dalla (iv) abbiamo:

$$r_{s-3}(\lambda) = q_{s-1}(\lambda)\cdot r_{s-2}(\lambda) + r_{s-1}(\lambda)$$

così che $r_s(\lambda)$ divide $r_{s-3}(\lambda)$. Perciò, ripercorrendo i passaggi che portano alla (vi), concludiamo che $r_s(\lambda)$ divide sia $f(\lambda)$ che $g(\lambda)$. Se il coefficiente dominante di $r_s(\lambda)$ è c, allora $d(\lambda) = c^{-1}r_s(\lambda)$.

Dalla (i), $r_1(\lambda) = f(\lambda) - q_1(\lambda)\cdot g(\lambda) = h_1(\lambda)\cdot f(\lambda) + k_1(\lambda)\cdot g(\lambda)$; sostituendo in (ii):

$$r_2(\lambda) = -q_2(\lambda)\cdot f(\lambda) + [1 + q_1(\lambda)\cdot q_2(\lambda)]g(\lambda) = h_2(\lambda)\cdot f(\lambda) + k_2(\lambda)\cdot g(\lambda)$$

Dalla (iii), $r_3(\lambda) = r_1(\lambda) - q_3(\lambda)\cdot r_2(\lambda)$. Sostituendo $r_1(\lambda)$ e $r_2(\lambda)$, abbiamo

$$\begin{aligned} r_3(\lambda) &= [1 + q_2(\lambda)\cdot q_3(\lambda)]f(\lambda) + [-q_1(\lambda) - q_3(\lambda) - q_1(\lambda)\cdot q_2(\lambda)\cdot q_3(\lambda)]g(\lambda) \\ &= h_3(\lambda)\cdot f(\lambda) + k_3(\lambda)\cdot g(\lambda) \end{aligned}$$

E proseguendo si ottiene infine:

$$r_s(\lambda) = h_s(\lambda)\cdot f(\lambda) + k_s(\lambda)\cdot g(\lambda)$$

Allora $d(\lambda) = c^{-1}r_s(\lambda) = c^{-1}h_s(\lambda)\cdot f(\lambda) + c^{-1}k_s(\lambda)\cdot g(\lambda) = h(\lambda)\cdot f(\lambda) + k(\lambda)\cdot g(\lambda)$, come richiesto.

Si lascia per esercizio la dimostrazione che $d(\lambda)$ è unico.

3. Trovare il massimo comune divisore $d(\lambda)$ di

$$f(\lambda) = 3\lambda^5 + 7\lambda^4 + 11\lambda + 6 \quad \text{e} \quad g(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 2$$

esprimendolo nella forma del Teorema III.

Si trova

(i) $f(\lambda) = (3\lambda+1)g(\lambda) + (\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4)$

(ii) $g(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4) + (\lambda^2+7\lambda+10)$

(iii) $\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4 = (\lambda-3)(\lambda^2+7\lambda+10) + (17\lambda+34)$

e

(iv) $\lambda^2 + 7\lambda + 10 = (\frac{1}{17}\lambda+\frac{5}{17})(17\lambda+34)$

Il massimo comune divisore è $\frac{1}{17}(17\lambda+34) = \lambda + 2$.

Dalla (iii):

$$17\lambda + 34 = (\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) - (\lambda - 3)(\lambda^2 + 7\lambda + 10)$$

Ricavando $\lambda^2 + 7\lambda + 10$ dalla (ii):

$$\begin{aligned} 17\lambda + 34 &= (\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) - (\lambda - 3)[g(\lambda) - (\lambda-2)(\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4)] \\ &= (\lambda^2 - 5\lambda + 7)(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) - (\lambda - 3)g(\lambda) \end{aligned}$$

e $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4$ dalla (i):

$$17\lambda + 34 = (\lambda^2 - 5\lambda + 7)f(\lambda) + (-3\lambda^3 + 14\lambda^2 - 17\lambda - 4)g(\lambda)$$

Allora:

$$\lambda + 2 = \frac{1}{17}(\lambda^2 - 5\lambda + 7)\cdot f(\lambda) + \frac{1}{17}(-3\lambda^3 + 14\lambda^2 - 17\lambda - 4)\cdot g(\lambda)$$

4. Dimostrare che se il massimo comune divisore di un $f(\lambda)$ di grado $n > 0$ e di un $g(\lambda)$ di grado $m > 0$ è diverso da 1, esistono dei polinomi non nulli $a(\lambda)$ di grado $< m$ e $b(\lambda)$ di grado $< n$ tali che

$$(a) \qquad a(\lambda)\cdot f(\lambda) + b(\lambda)\cdot g(\lambda) = 0$$

e viceversa.

Il massimo comune divisore di $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ sia $d(\lambda) \neq 1$; allora

$$f(\lambda) = d(\lambda)\cdot f_1(\lambda) \quad \text{e} \quad g(\lambda) = d(\lambda)\cdot g_1(\lambda)$$

in cui $f_1(\lambda)$ è di grado $< n$ e $g_1(\lambda)$ è di grado $< m$. Ora,

$$g_1(\lambda)\cdot f(\lambda) = g_1(\lambda)\cdot d(\lambda)\cdot f_1(\lambda) = g(\lambda)\cdot f_1(\lambda)$$

e

$$g_1(\lambda)\cdot f(\lambda) + [-f_1(\lambda)\cdot g(\lambda)] = 0$$

Perciò, prendendo $a(\lambda) = g_1(\lambda)$ e $b(\lambda) = -f_1(\lambda)$, abbiamo la (*a*).

Reciprocamente, supponiamo che $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ siano primi fra loro e sussista la (*a*). Allora per il Teorema IV esistono dei polinomi $h(\lambda)$ e $k(\lambda)$ tali che

$$h(\lambda)\cdot f(\lambda) + k(\lambda)\cdot g(\lambda) = 1$$

Quindi, con la (*a*):

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= a(\lambda)\cdot h(\lambda)\cdot f(\lambda) + a(\lambda)\cdot k(\lambda)\cdot g(\lambda) \\ &= -b(\lambda)\cdot h(\lambda)\cdot g(\lambda) + a(\lambda)\cdot k(\lambda)\cdot g(\lambda) \end{aligned}$$

e $g(\lambda)$ divide $a(\lambda)$. Ma questo è impossibile; quindi, se sussiste la (*a*), $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ non possono essere primi fra loro.

5. Dimostrare che ogni polinomio non nullo $f(\lambda)$ in $F[\lambda]$ può essere scritto come

$$f(\lambda) = c\cdot q_1(\lambda)\cdot q_2(\lambda) \ldots q_r(\lambda)$$

in cui $c \neq 0$ è una costante, e i $q_i(\lambda)$ sono polinomi in $F[\lambda]$, irriducibili, monici.

Scriviamo

$$(\text{i}) \qquad f(\lambda) = a_n\cdot f_1(\lambda)$$

in cui a_n è il coefficiente dominante di $f(\lambda)$. Se $f_1(\lambda)$ è irriducibile, la (i) soddisfa le condizioni del teorema. Altrimenti si avrà una riduzione in fattori

$$(\text{ii}) \qquad f(\lambda) = a_n\cdot g(\lambda)\cdot h(\lambda)$$

Se $g(\lambda)$ e $h(\lambda)$ sono irriducibili, la (ii) soddisfa le condizioni del teorema. Diversamente, una ulteriore riduzione porterà ad un insieme di fattori irriducibili, monici.

Per provare l'unicità, supponiamo che

$$a_n\cdot q_1(\lambda)\cdot q_2(\lambda) \ldots q_r(\lambda) \quad \text{e} \quad a_n\cdot p_1(\lambda)\cdot p_2(\lambda) \ldots p_s(\lambda)$$

siano due riduzioni in fattori, con $r < s$. Poiché $q_1(\lambda)$ divide $p_1(\lambda)\cdot p_2(\lambda) \ldots p_s(\lambda)$, dovrà dividere alcuni dei $p_i(\lambda)$ che, con un cambiamento della numerazione, possono essere presi come $p_1(\lambda)$. Dato che $p_1(\lambda)$ è monico e irriducibile, $q_1(\lambda) = p_1(\lambda)$. Allora $q_2(\lambda)$ divide $p_2(\lambda)\cdot p_3(\lambda) \ldots p_s(\lambda)$ e, dopo una ripetizione del citato ragionamento, $q_2(\lambda) = p_2(\lambda)$. Finalmente avremo $q_i(\lambda) = p_i(\lambda)$ per $i = 1, 2, \ldots, r$, e $p_{r+1}(\lambda)\cdot p_{r+2}(\lambda) \ldots p_s(\lambda) = 1$. Dato che l'ultima eguaglianza è impossibile, $r = s$ e l'unicità è constatata.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

6. Citare un esempio in cui il grado di $f(\lambda) + g(\lambda)$ è minore di quello del singolo $f(\lambda)$ o $g(\lambda)$.

7. Dimostrare il Teorema III.

8. Dimostrare: se $f(\lambda)$ divide $g(\lambda)$ e $h(\lambda)$, esso divide $g(\lambda) \pm h(\lambda)$.

9. Trovare una condizione necessaria e sufficiente perché i due polinomi non nulli $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ in $F[\lambda]$ si dividano l'un l'altro.

10. Trovare per ciascuno dei seguenti polinomi il massimo comune divisore nella forma del Teorema IV.

(*a*) $f(\lambda) = 2\lambda^5 - \lambda^3 + 2\lambda^2 - 6\lambda - 4$, $\quad g(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 2$

(*b*) $f(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 - 11\lambda + 6$, $\quad g(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 3$

(*c*) $f(\lambda) = 2\lambda^5 + 5\lambda^4 + 4\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$, $\quad g(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1$

(*d*) $f(\lambda) = 3\lambda^4 - 4\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 6$, $\quad g(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$

Risp. (*a*) $\lambda^2 - 2 = -\frac{1}{3}(\lambda-1)f(\lambda) + \frac{1}{3}(2\lambda^2+1)g(\lambda)$

(*b*) $\lambda - 3 = -\frac{1}{13}(\lambda+4)f(\lambda) + \frac{1}{13}(\lambda^2+5\lambda+5)g(\lambda)$

(*c*) $\lambda + 1 = \frac{1}{13}(\lambda+4)f(\lambda) + \frac{1}{13}(-2\lambda^3-9\lambda^2-2\lambda+9)g(\lambda)$

(*d*) $1 = \frac{1}{102}(5\lambda+2)f(\lambda) + \frac{1}{102}(-15\lambda^3+44\lambda^2-55\lambda+45)g(\lambda)$

11. Dimostrare il Teorema VI.

Traccia: Sia $d(\lambda)$ il massimo comune divisore di $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$; allora $g(\lambda) = d(\lambda)\cdot h(\lambda)$: o $d(\lambda)$ o $h(\lambda)$ è una costante.

12. Dimostrare i Teoremi VII e VIII.

13. Dimostrare: Se $f(\lambda)$ è primo relativamente a $g(\lambda)$ e divide $g(\lambda)\cdot a(\lambda)$, esso divide $a(\lambda)$.

14. Il minimo comune multiplo di $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ è un polinomio monico, multiplo sia di $f(\lambda)$ che di $g(\lambda)$ e di grado minimo. Trovare massimo comune divisore e minimo comune multiplo di

(*a*) $f(\lambda) = \lambda^3 - 1, \quad g(\lambda) = \lambda^2 - 1$

(*b*) $f(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)^2(\lambda+2), \quad g(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)^2(\lambda-3)$

Risp. (*a*) *m.c.d.* $= \lambda - 1$; *m.c.m.* $= (\lambda^2-1)(\lambda^2+\lambda+1)$

(*b*) *m.c.d.* $= (\lambda+1)(\lambda+2)$; *m.c.m.* $= (\lambda-1)(\lambda+1)^2(\lambda+2)^2(\lambda-3)$

15. Data $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, dimostrare:

(*a*) $\phi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5$ e $\phi(A) = A^3 - 3A^2 - 9A - 5I = 0$

(*b*) $m(A) = 0$, quando $m(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$.

16. Quale proprietà di un campo non è soddisfatta da un dominio polinomiale?

17. Lo scalare c è chiamato radice del polinomio $f(\lambda)$ se $f(c) = 0$. Dimostrare che lo scalare c è una radice di $f(\lambda)$ solo ed esclusivamente se $\lambda - c$ è un fattore di $f(\lambda)$.

18. Poniamo $f(\lambda) = (\lambda - c)^k g(\lambda)$. (*a*) Dimostrare che c è una radice, di molteplicità $k-1$, di $f'(\lambda)$. (*b*) Dimostrare che c è una radice, di molteplicità $k > 1$, di $f(\lambda)$ solo ed unicamente se c è una radice sia di $f(\lambda)$ che di $f'(\lambda)$.

19. Prendiamo $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$, non entrambi nulli, in $F[\lambda]$; loro massimo comune divisore sia $d(\lambda)$. Sia K un campo che contiene F. Dimostrare che se $D(\lambda)$ è il massimo comune divisore di $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ considerato in $K[\lambda]$, è allora $D(\lambda) = d(\lambda)$.

Traccia: Sia $d(\lambda) = h(\lambda)\cdot f(\lambda) + k(\lambda)\cdot g(\lambda)$, $f(\lambda) = s(\lambda)\cdot D(\lambda)$, $g(\lambda) = t(\lambda)\cdot D(\lambda)$, e $D(\lambda) = c(\lambda)\cdot d(\lambda)$.

20. Dimostrare che una matrice quadrata A di ordine n è normale, se $\bar{A}'$ si può esprimere come un polinomio

$$a_s A^s + a_{s-1} A^{s-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$$

in A.

CAPITOLO 23

Matrici lambda

DEFINIZIONI. Sia $F[\lambda]$ un dominio polinomiale costituito da tanti polinomi in λ con coefficienti in F. Una matrice di ordine $m \times n$, non nulla, su $F[\lambda]$

$$(23.1) \qquad A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)] = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \dots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

viene definita matrice lambda.

Sia p il massimo grado in λ dei polinomi $a_{ij}(\lambda)$ della (23.1). Allora si può scrivere la $A(\lambda)$ come polinomio matriciale di grado p in λ,

$$(23.2) \qquad A(\lambda) = A_p\lambda^p + A_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + A_1\lambda + A_0$$

nel quale le A_i sono matrici su F di ordine $m \times n$.

Esempio 1.

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda+1 & \lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+5 \\ \lambda^3-4 & \lambda^3-3\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^4 + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

è una matrice λ, o *polinomio matriciale* di grado quattro.

Se $A(\lambda)$ è quadrata di ordine n, si chiama singolare o non singolare a seconda che $|A(\lambda)|$ sia o no zero. Inoltre, $A(\lambda)$ si dice propria o impropria a seconda che A_p è non singolare o singolare. Il polinomio matriciale dell'Esempio 1 è non singolare e improprio.

OPERAZIONI CON MATRICI LAMBDA. Consideriamo le due matrici λ, quadrate di ordine n, o polinomi matriciali su $F(\lambda)$:

$$(23.3) \qquad A(\lambda) = A_p\lambda^p + A_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + A_1\lambda + A_0$$

e

$$(23.4) \qquad B(\lambda) = B_q\lambda^q + B_{q-1}\lambda^{q-1} + \dots + B_1\lambda + B_0$$

Le matrici (23.3) e (23.4) si dicono uguali, $A(\lambda) = B(\lambda)$, quando è $p = q$ e $A_i = B_i$, $(i = 0, 1, 2, \dots, p)$.

La somma $A(\lambda) + B(\lambda)$ è una matrice lambda $C(\lambda)$, ottenuta sommando elementi corrispondenti delle due matrici λ.

Il prodotto $A(\lambda)\cdot B(\lambda)$ è una matrice λ, o polinomio matriciale, di grado massimo $p+q$. Se $A(\lambda)$ o $B(\lambda)$ è non singolare, il grado di $A(\lambda)\cdot B(\lambda)$, e anche quello di $B(\lambda)\cdot A(\lambda)$, è esattamente $p+q$.

L'eguaglianza (23.3) non è alterata quando il λ venga sostituito dappertutto da uno scalare k di F. Per esempio, ponendo $\lambda = k$ nella (23.3) si ottiene

$$A(k) = A_p k^p + A_{p-1}k^{p-1} + \dots + A_1 k + A_0$$

Tuttavia quando λ viene sostituito da una matrice C, quadrata di ordine n, si possono avere due risultati; questo perché, in generale, due matrici quadrate di ordine n non commutano. Definiamo

$$(23.5)\qquad A_R(C) = A_p C^p + A_{p-1}C^{p-1} + \ldots + A_1 C + A_0$$

e

$$(23.6)\qquad A_L(C) = C^p A_p + C^{p-1}A_{p-1} + \ldots + CA_1 + A_0$$

chiamate rispettivamente valori funzionali di $A(\lambda)$ di destra e di sinistra.

Esempio 2. Sia $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Allora $A_R(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 26 \end{bmatrix}$

e

$A_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 17 & 27 \end{bmatrix}$

Vedere il Problema 1.

DIVISIONE. Nel Problema 2 si dimostra:

I. Se $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ sono i polinomi matriciali (23.3) e (23.4), e se B_q è non singolare, esistono allora degli unici polinomi matriciali $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$; $Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)$, in cui $R_1(\lambda)$ e $R_2(\lambda)$ o sono zero, o sono di grado minore di quello di $B(\lambda)$, tali che

$$(23.7)\qquad A(\lambda) = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

e

$$(23.8)\qquad A(\lambda) = B(\lambda)\cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda)$$

Se $R_1(\lambda) = 0$, $B(\lambda)$ si chiama divisore di destra di $A(\lambda)$; se è $R_2(\lambda) = 0$, $B(\lambda)$ è un divisore di sinistra di $A(\lambda)$.

Esempio 3. Se $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^4+\lambda^2+\lambda-1 & \lambda^3+\lambda^2+\lambda+2 \\ 2\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix}$ e $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}$, avremo

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2-1 & \lambda-1 \\ 2\lambda & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\lambda & 2\lambda+3 \\ -5\lambda & -2\lambda \end{bmatrix} = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

e

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-1 & 1 \end{bmatrix} = B(\lambda)\cdot Q_2(\lambda)$$

Qui $B(\lambda)$ è un divisore di sinistra di $A(\lambda)$.

Vedere il Problema 3.

Un polinomio matriciale di forma

$$(23.9)\qquad B(\lambda) = b_q\lambda^q\cdot I_n + b_{q-1}\lambda^{q-1}\cdot I_n + \ldots + b_1\lambda\cdot I_n + b_0 I_n = b(\lambda)\cdot I_n$$

si chiama scalare. Un polinomio scalare di matrici $B(\lambda) = b(\lambda)\cdot I_n$ commuta con ogni polinomio di matrici quadrate di ordine n.

Se nelle (23.7) e (23.8) è $B(\lambda) = b(\lambda)\cdot I$, allora

$$(23.10)\qquad A(\lambda) = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda) = B(\lambda)\cdot Q_1(\lambda) + R_1(\lambda)$$

Esempio 4. Sia $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda & \lambda+1 \\ \lambda^2-1 & 2\lambda+1 \end{bmatrix}$, e $B(\lambda) = (\lambda+2)I_2$. Allora

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda-2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

e

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda-2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = B(\lambda)\cdot Q_1(\lambda) + R_1(\lambda)$$

Se $R_1(\lambda) = 0$ nella (23.10), è $A(\lambda) = b(\lambda)\cdot I\cdot Q_1(\lambda)$ e si ha:

II. Un polinomio di matrici $A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)]$ di grado n è divisibile per un polinomio scalare di matrici $B(\lambda) = b(\lambda)\cdot I_n$ solo ed unicamente se ogni $a_{ij}(\lambda)$ è divisibile per $b(\lambda)$.

TEOREMA DEL RESTO. Sia $A(\lambda)$ la matrice λ della (23.3) e sia $B = [b_{ij}]$ una matrice quadrata di ordine n su F. Poiché $\lambda I - B$ è non singolare potremo scrivere

$$(23.11)\qquad A(\lambda) = Q_1(\lambda)\cdot(\lambda I - B) + R_1$$

e

$$(23.12)\qquad A(\lambda) = (\lambda I - B)\cdot Q_2(\lambda) + R_2$$

con R_1 e R_2 liberi da λ. Si può dimostrare:

III. Se il polinomio matriciale $A(\lambda)$ della (23.3) viene diviso per $\lambda I - B$, con $B = [b_{ij}]$ quadrata di ordine n, fino ad ottenere dei resti R_1 e R_2, liberi da λ, allora

$$R_1 = A_R(B) = A_p B^p + A_{p-1}B^{p-1} + \ldots + A_1 B + A_0$$

e

$$R_2 = A_L(B) = B^p A_p + B^{p-1}A_{p-1} + \ldots + BA_1 + A_0$$

Esempio 5. Sia $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2+2 \end{bmatrix}$ e $\lambda I - B = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix}$ Allora

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 3 \\ 4 & \lambda+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 26 \end{bmatrix} = Q_1(\lambda)\cdot(\lambda I - B) + R_1$$

e

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda+1 & 3 \\ 4 & \lambda+4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 17 & 27 \end{bmatrix} = (\lambda I - B)Q_2(\lambda) + R_2$$

Dall'Esempio 2, $R_1 = A_R(B)$ e $R_2 = A_L(B)$ in accordo con il Teorema **III**.

Quando $A(\lambda)$ è un polinomio matriciale scalare

$$A(\lambda) = f(\lambda)\cdot I = a_p I\lambda^p + a_{p-1}I\lambda^{p-1} + \ldots + a_1 I\lambda + a_0 I$$

i resti nelle (23.11) e (23.12) sono identici, così che

$$R_1 = R_2 = a_p B^p + a_{p-1}B^{p-1} + \ldots + a_1 B + a_0 I$$

ed avremo

IV. Se un polinomio matriciale scalare $f(\lambda)\cdot I_n$ viene diviso per $\lambda I_n - B$ fino ad ottenere un resto R esente da λ, allora $R = f(B)$.

Come conseguenza si ha:

V. Un polinomio matriciale scalare $f(\lambda)\cdot I_n$ è divisibile per $\lambda I_n - B$ solo ed unicamente se $f(B) = 0$.

TEOREMA DI CAYLEY-HAMILTON. Consideriamo la matrice quadrata di ordine n $A = [a_{ij}]$ avente come matrice caratteristica $\lambda I - A$ ed equazione caratteristica $\phi(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$. Per la (6.2),

$$(\lambda I - A)\cdot \text{agg}(\lambda I - A) = \phi(\lambda)\cdot I$$

Allora $\phi(\lambda)\cdot I$ è divisibile per $\lambda I - A$ e, per il Teorema V, $\phi(A) = 0$. Perciò

VI. Ogni matrice quadrata $A = [a_{ij}]$ soddisfa la sua equazione caratteristica $\phi(\lambda) = 0$.

Esempio 6. L'equazione caratteristica di $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ è $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$. Ora

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Vedere il Problema 4.

PROBLEMI RISOLTI

1. Per la matrice $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda+1 & 1 \end{bmatrix}$, calcolare $A_D(C)$ e $A_S(C)$, essendo $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e } C^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; \text{ allora}$$

$$A_D(C) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$A_S(C) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Dimostrare: Se $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ sono le matrici lambda (23.3) e (23.4), e se B_q è non singolare, esistono delle uniche matrici lambda $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$; $Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)$, in cui $R_1(\lambda)$ e $R_2(\lambda)$ o sono zero, o sono di grado inferiore a quello di $B(\lambda)$; esse sono tali che

(i) $$A(\lambda) = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

e

(ii) $$A(\lambda) = B(\lambda)\cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda)$$

Se $p < q$, la (i) sussiste con $Q_1(\lambda) = 0$ e $R_1(\lambda) = A(\lambda)$. Poniamo che sia $p \geqq q$; allora

$$A(\lambda) - A_p B_q^{-1} B(\lambda)\lambda^{p-q} = C(\lambda)$$

dove $C(\lambda)$ o è zero, o è di grado $p-1$ al più.

Se $C(\lambda)$ è zero, o di grado minore di q, abbiamo la (i) con

$$Q_1(\lambda) = A_p B_q^{-1}\lambda^{p-q} \quad \text{e} \quad R_1(\lambda) = C(\lambda)$$

Se $C(\lambda) = C_s\lambda^s + \ldots$, con $s > q$, troviamo

$$A(\lambda) - A_p B_q^{-1} B(\lambda)\lambda^{p-q} - C_s B_q^{-1} B(\lambda)\lambda^{s-q} = D(\lambda)$$

Se $D(\lambda)$ è zero, o di grado minore di q, abbiamo la (i) con

$$Q_1(\lambda) = A_p B_q^{-1}\lambda^{p-q} + C_s B_q^{-1}\lambda^{s-q} \quad \text{e} \quad R_1(\lambda) = D(\lambda)$$

altrimenti si continua il procedimento. Dato che questo consiste in una sequenza di polinomi matriciali $C(\lambda)$, $D(\lambda)$, ... con gradi decrescenti, raggiungeremo infine un polinomio matriciale che sarà o zero, o di grado inferiore a q; e avremo la (i).

Per avere la (ii) cominciamo con

$$A(\lambda) - B(\lambda) B_q^{-1} A_p \lambda^{p-q}$$

Questa derivazione, insieme alla dimostrazione di unicità, si lascia come esercizio. Vedere il Problema 1 del cap. 22.

3. Date $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^4 + 2\lambda^3 - 1 & \lambda^3 - \lambda - 1 \\ \lambda^3 + \lambda^2 + 1 & \lambda^3 + 1 \end{bmatrix}$ e $B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^2 - \lambda & -\lambda^2 + \lambda - 1 \\ -\lambda^2 + 2 & \lambda^2 - \lambda \end{bmatrix}$ trovare le matrici $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$; $Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)$ tali che (a) $A(\lambda) = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$, (b) $A(\lambda) = B(\lambda)\cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda)$ come nel Problema 2.

Abbiamo

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^4 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

E qui, $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Calcoliamo

$$A(\lambda) - A_4 B_2^{-1} B(\lambda)\lambda^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = C(\lambda)$$

e

$$C(\lambda) - C_3 B_2^{-1} B(\lambda)\lambda = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} -10 & 3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = D(\lambda)$$

$$D(\lambda) - D_2 B_2^{-1} B(\lambda) = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -13 & 3 \\ -9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\lambda - 13 & 5\lambda + 3 \\ -2\lambda - 9 & 3\lambda + 5 \end{bmatrix} = R_1(\lambda)$$

Allora:

$$Q_1(\lambda) = (A_4\lambda^2 + C_3\lambda + D_2)B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 4 & \lambda^2 + 5\lambda + 6 \\ 2\lambda + 4 & 3\lambda + 5 \end{bmatrix}$$

(b) Calcoliamo

$$A(\lambda) - B(\lambda) B_2^{-1} A_4\lambda^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = E(\lambda)$$

$$E(\lambda) - B(\lambda) B_2^{-1} E_3\lambda = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = F(\lambda)$$

e

$$F(\lambda) - B(\lambda) B_2^{-1} F_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 8 & -\lambda + 4 \\ \lambda - 7 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = R_2(\lambda)$$

Allora, $$Q_2(\lambda) = B_2^{-1}(A_4\lambda^2 + E_3\lambda + F_2) = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix}4 & 2\\6 & 3\end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix}4 & 2\\9 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda^2+4\lambda+4 & 2\lambda+2\\ \lambda^2+6\lambda+9 & 3\lambda+5\end{bmatrix}$$

4. Data $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}$, utilizzare il fatto che A soddisfa la sua equazione caratteristica per calcolare A^3 ed A^4; e per calcolare ancora, dato che A è non singolare, A^{-1} e A^{-2}.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -2\\-3 & \lambda-1 & -1\\-2 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 7\lambda - 11 = 0$$

Allora:

$$A^3 = 3A^2 + 7A + 11I = 3\begin{bmatrix}8 & 8 & 5\\8 & 7 & 8\\13 & 8 & 8\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}42 & 31 & 29\\45 & 39 & 31\\53 & 45 & 42\end{bmatrix}$$

$$A^4 = 3A^3 + 7A^2 + 11A = 3\begin{bmatrix}42 & 31 & 29\\45 & 39 & 31\\53 & 45 & 42\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}8 & 8 & 5\\8 & 7 & 8\\13 & 8 & 8\end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}193 & 160 & 144\\224 & 177 & 160\\272 & 224 & 193\end{bmatrix}$$

Dalla $11I = -7A - 3A^2 + A^3$, abbiamo

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\{-7I - 3A + A^2\} = \frac{1}{11}\left\{-7\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}8 & 8 & 5\\8 & 7 & 8\\13 & 8 & 8\end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix}-2 & 5 & -1\\-1 & -3 & 5\\7 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$A^{-2} = \frac{1}{11}\{-7A^{-1} - 3I + A\} = \frac{1}{121}\left\{-7\begin{bmatrix}-2 & 5 & -1\\-1 & -3 & 5\\7 & -1 & -2\end{bmatrix} - 33\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{121}\begin{bmatrix}-8 & -24 & 29\\40 & -1 & -24\\-27 & 40 & -8\end{bmatrix}$$

5. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ le radici caratteristiche di una matrice quadrata A di ordine n, e sia $h(x)$ un polinomio di grado p in x. Dimostrare che $|h(A)| = h(\lambda_1)\cdot h(\lambda_2)\dots h(\lambda_n)$.

Abbiamo

(i) $$|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)$$

Sia

(ii) $$h(x) = c(s_1 - x)(s_2 - x)\dots(s_p - x)$$

Allora:

$$h(A) = c(s_1I - A)(s_2I - A)\dots(s_pI - A)$$

e

$$\begin{aligned}|h(A)| &= c^p|s_1I - A|\cdot|s_2I - A|\dots|s_pI - A|\\ &= \{c(s_1-\lambda_1)(s_1-\lambda_2)\dots(s_1-\lambda_n)\}\\ &\qquad\cdot\{c(s_2-\lambda_1)(s_2-\lambda_2)\dots(s_2-\lambda_n)\}\dots\{c(s_p-\lambda_1)(s_p-\lambda_2)\dots(s_p-\lambda_n)\}\\ &= \{c(s_1-\lambda_1)(s_2-\lambda_1)\dots(s_p-\lambda_1)\}\\ &\qquad\cdot\{c(s_1-\lambda_2)(s_2-\lambda_2)\dots(s_p-\lambda_2)\}\dots\{c(s_1-\lambda_n)(s_2-\lambda_n)\dots(s_p-\lambda_n)\}\\ &= h(\lambda_1)\,h(\lambda_2)\dots h(\lambda_n)\end{aligned}$$

usando la **(ii)**.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

6. Date $A(\lambda) = \begin{bmatrix}\lambda^2+2\lambda & \lambda\\ \lambda^2+1 & \lambda-1\end{bmatrix}$ e $B(\lambda) = \begin{bmatrix}\lambda^2 & \lambda^2+\lambda\\ \lambda+1 & \lambda\end{bmatrix}$, calcolare:

(*a*) $A(\lambda) + B(\lambda) = \begin{bmatrix}2\lambda^2+2\lambda & \lambda^2+2\lambda\\ \lambda^2+\lambda+2 & 2\lambda-1\end{bmatrix}$

(*b*) $A(\lambda) - B(\lambda) = \begin{bmatrix}2\lambda & -\lambda^2\\ \lambda^2-\lambda & -1\end{bmatrix}$

(*c*) $A(\lambda)\cdot B(\lambda) = \begin{bmatrix}\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2+\lambda & \lambda^4+3\lambda^3+3\lambda^2\\ \lambda^4+2\lambda^2-1 & \lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2\end{bmatrix}$

(*d*) $B(\lambda)\cdot A(\lambda) = \begin{bmatrix}2\lambda^4+3\lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3-\lambda\\ 2\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda & 2\lambda^2\end{bmatrix}$

7. Date $A(\lambda) = \begin{bmatrix}\lambda^2+1 & \lambda^2\\ \lambda+2 & \lambda-1\end{bmatrix}$, $B(\lambda) = \begin{bmatrix}\lambda^2 & \lambda\\ -\lambda^2 & 1\end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{bmatrix}$, calcolare:

$A_R(C) = \begin{bmatrix}2 & 1\\5 & -2\end{bmatrix}$, $B_R(C) = \begin{bmatrix}3 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$, $A_R(C)\cdot B_R(C) = \begin{bmatrix}5 & -1\\17 & -7\end{bmatrix}$, $B_R(C)\cdot A_R(C) = \begin{bmatrix}1 & 5\\3 & -3\end{bmatrix}$,

$P_R(C) = \begin{bmatrix}5 & -1\\9 & -3\end{bmatrix}$, $Q_R(C) = \begin{bmatrix}3 & 3\\3 & -3\end{bmatrix}$;

$A_L(C) = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{bmatrix}$, $B_L(C) = \begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix}$, $A_L(C)\cdot B_L(C) = \begin{bmatrix}1 & 5\\3 & -5\end{bmatrix}$, $B_L(C)\cdot A_L(C) = \begin{bmatrix}3 & -1\\1 & -7\end{bmatrix}$,

$P_L(C) = \begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{bmatrix}$, $Q_L(C) = \begin{bmatrix}5 & 1\\3 & -5\end{bmatrix}$.

in cui $P(\lambda) = A(\lambda)\cdot B(\lambda)$ e $Q(\lambda) = B(\lambda)\cdot A(\lambda)$.

8. Se $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ sono delle matrici λ, quadrate di ordine n, proprie, di grado rispettivo p e q, e se $C(\lambda)$ è una matrice λ non nulla, dimostrare che il grado del triplo prodotto — in qualsiasi ordine — è almeno $p+q$.

9. Per ogni coppia di matrici $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$, trovare le matrici $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$; $Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)$ che soddisfano le (23.7) e (23.8).

(*a*) $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda & \lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix}, \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$

(*b*) $A(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda^2+\lambda & -\lambda^2+2\lambda+2 \\ -\lambda^2+2\lambda-1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$

(*c*) $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3-2\lambda+1 & \lambda^4+\lambda^2+7\lambda-2 & 5\lambda^2+2\lambda+4 \\ \lambda^4+3\lambda^2-3\lambda-1 & 3\lambda^3+2\lambda+2 & 4\lambda^2+6\lambda+1 \\ 2\lambda^3-\lambda+2 & \lambda^3+2\lambda^2 & \lambda^3+\lambda^2+8\lambda-4 \end{bmatrix},$

$B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 & 3\lambda-1 \\ 2\lambda & \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-2 & 2\lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$

(*d*) $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^4+\lambda^2-1 & \lambda^3-1 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda^3-\lambda^2+1 & \lambda^4+\lambda^2+2 & \lambda-1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda+1 & 2\lambda^4+\lambda-2 \end{bmatrix}, \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2-2\lambda-1 & \lambda^2+1 & \lambda+1 \\ \lambda+1 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2-2\lambda \\ \lambda & \lambda-2 & \lambda^2+\lambda-1 \end{bmatrix}$

Risp. (*a*) $Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1(\lambda) = 0; \quad Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda & \lambda-1 \\ -\lambda+2 & -\lambda+2 \end{bmatrix}, \quad R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(*b*) $Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & -\lambda-1 \\ -\lambda+1 & -1 \end{bmatrix}, \quad R_1(\lambda) = 0; \quad Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda-1 & -\lambda+1 \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(*c*) $Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda+1 & \lambda^2+3 & -\lambda+7 \\ \lambda^2-1 & 3\lambda+5 & -3\lambda+2 \\ 2\lambda-3 & \lambda & \lambda-6 \end{bmatrix}, \quad R_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -16\lambda+14 & -6\lambda-3 & -5\lambda+2 \\ -21\lambda+4 & -2\lambda+3 & \lambda-5 \\ 5\lambda-7 & 10\lambda+3 & 18\lambda-7 \end{bmatrix}$

$Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & \lambda^2 & 2 \\ \lambda^2+1 & \lambda & 3 \\ -1 & 2 & \lambda+1 \end{bmatrix}, \quad R_2(\lambda) = 0$

(*d*) $Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^2+6\lambda+31 & -3\lambda^2-5\lambda-16 & 3\lambda^2-7\lambda+8 \\ \lambda-3 & \lambda^2-\lambda-1 & -\lambda^2+4\lambda-7 \\ -2\lambda-1 & 7 & 2\lambda^2-2\lambda-1 \end{bmatrix}$

$R_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 81\lambda+46 & -12\lambda-16 & -85\lambda-23 \\ 4\lambda-1 & 15\lambda-9 & 12\lambda-5 \\ -9\lambda-8 & -7\lambda & 17\lambda-2 \end{bmatrix}$

$Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^2+5\lambda+31 & -\lambda^2-\lambda-4 & 2\lambda^2-4\lambda+3 \\ \lambda-14 & \lambda^2 & -2\lambda^2+6\lambda-6 \\ -3\lambda-2 & 3 & 2\lambda^2-2\lambda-2 \end{bmatrix}$

$R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 71\lambda+46 & -12\lambda-8 & -\lambda+11 \\ -26\lambda-30 & 11\lambda+6 & 4\lambda-4 \\ -15\lambda-30 & 2\lambda+4 & 16\lambda-16 \end{bmatrix}$

10. Verificare nel Problema 9(*b*) che $R_1(\lambda) = A_D(C)$ e $R_2(\lambda) = A_S(C)$, con $B(\lambda) = \lambda I - C$.

11. Date $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 3\lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix}$ e $C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & \lambda \\ \lambda-3 & \lambda+1 \end{bmatrix}$

(*a*) calcolare $A(\lambda) = B(\lambda)\cdot C(\lambda)$;

(*b*) trovare $Q(\lambda)$ e $R(\lambda)$,di grado almeno uno, tali che $A(\lambda) = Q(\lambda)\cdot B(\lambda) + R(\lambda)$.

Risp. $\begin{bmatrix} \lambda^3+5\lambda^2-7\lambda-1 & \lambda^3+3\lambda^2+5\lambda+1 \\ \lambda^3-5\lambda^2+11\lambda-10 & \lambda^3-\lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+4 & \lambda+3 \\ \lambda-6 & \lambda-1 \end{bmatrix} B(\lambda) + \begin{bmatrix} -9\lambda+1 & -\lambda-9 \\ 13\lambda-6 & 9\lambda+10 \end{bmatrix}$

12. Data $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcolare come nel Problema 4

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \qquad A^4 = \begin{bmatrix} 17 & 24 \\ 12 & 17 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^{-2} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A^{-3} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

13. Dimostrare che se A e B sono matrici simili, e se $g(\lambda)$ è un polinomio scalare, $g(A)$ e $g(B)$ sono simili.

Traccia: Dimostrare prima che A^k e B^k sono simili per k intero positivo qualsiasi.

14. Dimostrare che se $B = \text{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ e $g(\lambda)$ è un qualsiasi polinomio scalare, allora

$$g(B) = \text{diag}\left(g(B_1), g(B_2), \ldots, g(B_m)\right)$$

15. Dimostrare il Teorema III.

Traccia: Verificare che $\lambda I - B$ divide $A(\lambda) - A_D(B)$.

16. La matrice C si chiama radice del polinomio matriciale scalare $B(\lambda)$ della (23.9), se $B(C) = 0$. Dimostrare che la matrice C è una radice di $B(\lambda)$ solo ed esclusivamente se la matrice caratteristica di C divide $B(\lambda)$.

17. Dimostrare che se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sono le radici caratteristiche di A, e se $f(A)$ è un polinomio scalare in A, allora le radici caratteristiche di $f(A)$ sono $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$.

Traccia: Scrivere $\lambda - f(x) = c(x_1-x)(x_2-x)\ldots(x_s-x)$, in modo che $|\lambda I - f(A)| = c^n|x_1I-A|\cdot|x_2I-A| \ldots |x_sI-A|$. Usare adesso $|x_iI-A| = (x_i-\lambda_1)(x_i-\lambda_2)\ldots(x_i-\lambda_n)$ e $c(x_1-\lambda_j)(x_2-\lambda_j)\ldots(x_s-\lambda_j) = \lambda - f(\lambda_j)$.

18. Trovare le radici caratteristiche di $f(A) = A^2 - 2A + 3$, data $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

19. Ricavare il teorema del Problema 5 quale corollario del Problema 17.

20. Dimostrare che se X è un vettore invariante della A del Problema 17, è anche un vettore invariante di $f(A)$.

21. Sia $A(t) = [a_{ij}(t)]$,in cui $a_{ij}(t)$ sono dei polinomi reali nella variabile reale t. Prendiamo

$$A(t) = \begin{bmatrix} t^2+t+1 & t^4+2t^3+3t^2+5 \\ t^3-4 & t^3-3t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}t^4 + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}t^3 + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}t^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}t + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

e differenziamo l'ultimo membro come fosse un polinomio a coefficienti costanti, per inserire la definizione

$$\frac{d}{dt}A(t) = \left[\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right]$$

22. Ricavare le formule per:

(*a*) $\frac{d}{dt}\{A(t)+B(t)\}$; (*b*) $\frac{d}{dt}\{cA(t)\}$, in cui c è una costante oppure $c = [c_{ij}]$; (*c*) $\frac{d}{dt}\{A(t)\cdot B(t)\}$; (*d*) $\frac{d}{dt}A^{-1}(t)$.

Traccia: Per la (*c*) scrivere $A(t)\cdot B(t) = C(t) = [c_{ij}(t)]$ e differenziare $c_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, b_{kj}(t)$. Per la (*d*) usare $A(t)\cdot A^{-1}(t) = I$.

CAPITOLO 24

Forma normale di Smith

PER TRASFORMAZIONE ELEMENTARE su di una matrice lambda $A(\lambda)$ su $F[\lambda]$ s'intende:

(1) Lo scambio di *i*-ma e *j*-ma riga, indicato da H_{ij}; lo scambio di *i*-ma e *j*-ma colonna, K_{ij}.

(2) La moltiplicazione della *i*-ma riga per una costante non nulla k: $H_i(k)$;
la moltiplicazione della *i*-ma colonna per una costante non nulla k: $K_i(k)$.

(3) L'addizione della *i*-ma riga del prodotto di $f(\lambda)$, polinomio qualsiasi di $F[\lambda]$, e della riga *j*-ma: $H_{ij}(f(\lambda))$;
l'addizione alla *i*-ma colonna del prodotto di $f(\lambda)$ e della *j*-ma colonna, indicata con $K_{ij}(f(\lambda))$.

Queste sono le trasformazioni elementari del cap. 5, se si eccettua il fatto che al punto (3) la parola scalare è stata sostituita dalla parola polinomio. Una trasformazione elementare, e la matrice elementare che si ottiene effettuando su I la trasformazione elementare stessa, saranno ancora indicate con lo stesso simbolo. Ancora, una trasformazione di riga su $A(\lambda)$ si effettua moltiplicandola a sinistra per l'opportuna H, mentre una trasformazione di colonna si effettua moltiplicando $A(\lambda)$ a destra per l'opportuna K.

Confrontando con il cap. 5 abbiamo:

I. Ogni matrice elementare in $F[\lambda]$ ha una inversa, che a sua volta è matrice elementare in $F[\lambda]$.

II. Se $|A(\lambda)| = k \neq 0$, con k in F, $A(\lambda)$ è un prodotto di matrici elementari.

III. Il rango di una matrice λ è invariante per trasformazioni elementari.

Due matrici λ, quadrate di ordine n, $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ con elementi in $F[\lambda]$ si chiamano equivalenti purché esistano una $P(\lambda) = H_s \dots H_2 \cdot H_1$ e una $Q(\lambda) = K_1 \cdot K_2 \dots K_t$ tali che

$$B(\lambda) = P(\lambda) \cdot A(\lambda) \cdot Q(\lambda) \tag{24.1}$$

Perciò,

IV. Matrici λ di ordine $m \times n$ ed equivalenti hanno lo stesso rango.

INSIEME CANONICO. Nei Problemi 1 e 2 dimostriamo:

V. Siano $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ delle matrici equivalenti di rango r; allora il massimo comune divisore di tutti i minori di $A(\lambda)$, quadrati di ordine s, essendo $s \leq r$, è anche il massimo comune divisore di tutti i minori di $B(\lambda)$, quadrati di ordine s.

Nel Problema 3 si dimostra:

VI. Ogni matrice lambda $A(\lambda)$ di rango r può venire ridotta, tramite trasformazioni elementari, alla forma normale di Smith:

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_r(\lambda) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{24.2}$$

in cui ogni $f_i(\lambda)$ è monico, e $f_i(\lambda)$ divide $f_{i+1}(\lambda)$, $(i = 1, 2, \dots, r-1)$.

Quando una matrice lambda $A(\lambda)$ di rango r è stata ridotta alla (24.2), il massimo comune divisore di tutti i minori di $A(\lambda)$ quadrati di ordine s, essendo $s \leq r$, è anche il massimo comune divisore di tutti i minori di $N(\lambda)$ quadrati di ordine s; questo per il Teorema V. Dato che nella $N(\lambda)$ ogni $f_i(\lambda)$ divide $f_{i+1}(\lambda)$, il massimo comune divisore di tutti i minori quadrati di ordine s di $N(\lambda)$, e perciò anche di $A(\lambda)$, sarà:

$$g_s(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) \cdot \dots \cdot f_s(\lambda), \quad (s = 1, 2, \dots, r) \tag{24.3}$$

Poniamo che $A(\lambda)$ sia stata ridotta a

$$N(\lambda) = \text{diag}\,(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_r(\lambda), 0, \dots, 0)$$

ed a

$$N_1(\lambda) = \text{diag}\,(h_1(\lambda), h_2(\lambda), \dots, h_r(\lambda), 0, \dots, 0)$$

Per la (24.3),

$$g_s(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) \cdot \dots \cdot f_s(\lambda) = h_1(\lambda) \cdot h_2(\lambda) \cdot \dots \cdot h_s(\lambda)$$

Ora, $g_1(\lambda) = f_1(\lambda) = h_1(\lambda)$, $g_2(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) = h_1(\lambda) \cdot h_2(\lambda)$, così che $f_2(\lambda) = h_2(\lambda)$, ...; in generale, definendo $g_0(\lambda) = 1$, allora:

$$g_s(\lambda)/g_{s-1}(\lambda) = f_s(\lambda) = h_s(\lambda), \quad (s = 1, 2, \dots, r) \tag{24.4}$$

ed abbiamo

VII. La matrice $N(\lambda)$ della (24.2) è unicamente determinata dalla matrice data $A(\lambda)$.

Percio le matrici normali di Smith sono un insieme canonico per equivalenza su $F[\lambda]$.

Esempio 1. Consideriamo $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ \lambda^3+2\lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+3\lambda^2+\lambda \\ \lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^2+2\lambda+1 & 3\lambda^2+6\lambda+3 \end{bmatrix}$.

Si trova subito che il massimo comune divisore dei minori a una riga (elementi) di $A(\lambda)$ è $g_1(\lambda) = 1$, mentre il massimo comune divisore dei minori a due righe di $A(\lambda)$ è $g_2(\lambda) = \lambda$, e $g_3(\lambda) = \frac{1}{2}|A(\lambda)| = \lambda^3 + \lambda^2$. Allora, per la (24.4):

$$f_1(\lambda) = g_1(\lambda) = 1, \quad f_2(\lambda) = g_2(\lambda)/g_1(\lambda) = \lambda, \quad f_3(\lambda) = g_3(\lambda)/g_2(\lambda) = \lambda^2+\lambda$$

e la forma normale di Smith per $A(\lambda)$ è

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}$$

Per un'altra riduzione vedere il Problema 4.

FATTORI INVARIANTI. I polinomi $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_r(\lambda)$ nella diagonale della forma normale di Smith della $A(\lambda)$ si chiamano fattori invarianti di $A(\lambda)$. Se $f_k(\lambda) = 1$, con $k \leq r$, allora $f_1(\lambda) = f_2(\lambda) = \dots = f_k(\lambda) = 1$ e ciascuno viene detto fattore invariante triviale.

Come conseguenza del Teorema **VII**, abbiamo:

VIII. Due matrici lambda quadrate di ordine n su $F[\lambda]$ sono equivalenti su detto campo solo ed esclusivamente se hanno gli stessi fattori invarianti.

DIVISORI ELEMENTARI. Sia la $A(\lambda)$ una matrice lambda quadrata di ordine n su $F[\lambda]$, e i suoi fattori invarianti siano espressi come

$$f_i(\lambda) = \{p_1(\lambda)\}^{q_{i1}}\{p_2(\lambda)\}^{q_{i2}}\ldots\{p_s(\lambda)\}^{q_{is}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{24.5}$$

in cui $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \ldots, p_s(\lambda)$ sono dei polinomi in $F[\lambda]$, irriducibili, monici, distinti. Alcuni dei q_{ij} possono essere zero, e il fattore corrispondente essere eliminato; comunque, dato che $f_i(\lambda)$ divide $f_{i+1}(\lambda)$, è $q_{i+1,j} \geqq q_{ij}$, $(i = 1, 2, \ldots, r-1;\ j = 1, 2, \ldots, s)$.

I fattori $\{p_j(\lambda)\}^{q_{ij}} \neq 1$ che compaiono nella **(24.5)** si chiamano divisori elementari su $F[\lambda]$ di $A(\lambda)$.

Esempio 2. Supponiamo che una matrice lambda $A(\lambda)$ quadrata di ordine 10 sul campo razionale, abbia la forma normale di Smith

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1)^2\lambda & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)^2\lambda^2(\lambda^2-3) & \\
\hline
 & & 0 & & & 0
\end{array}\right]$$

Il rango è 5. I fattori invarianti sono

$$f_1(\lambda) = 1, \quad f_2(\lambda) = 1, \quad f_3(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+1),$$
$$f_4(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+1)^2\lambda, \quad f_5(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)^2\lambda^2(\lambda^2-3)$$

I divisori elementari sono

$$(\lambda-1)^2,\ \lambda-1,\ \lambda-1,\ (\lambda^2+1)^2,\ (\lambda^2+1)^2,\ (\lambda^2+1),\ \lambda^2,\ \lambda,\ \lambda^2-3$$

Si noti che i divisori elementari non sono necessariamente distinti; ognuno appare nell'elenco tante volte quante è comparso nei fattori invarianti.

Esempio 3. (*a*) Sul campo reale i fattori invarianti di $A(\lambda)$ dell'Esempio 2 sono immutati, ma i divisori elementari sono:

$$(\lambda-1)^2,\ \lambda-1,\ \lambda-1,\ (\lambda^2+1)^2,\ (\lambda^2+1)^2,\ (\lambda^2+1),\ \lambda^2,\ \lambda,\ \lambda-\sqrt{3},\ \lambda+\sqrt{3}$$

dato che λ^2-3 può essere ridotto in fattori.

(*b*) Sul campo complesso i fattori invarianti restano immutati, mentre i divisori elementari sono:

$$(\lambda-1)^2,\ \lambda-1,\ \lambda-1,\ (\lambda+i)^2,\ (\lambda+i)^2,\ \lambda+i,\ (\lambda-i)^2,$$
$$(\lambda-i)^2,\ \lambda-i,\ \lambda^2,\ \lambda,\ \lambda-\sqrt{3},\ \lambda+\sqrt{3}$$

I fattori invarianti di una matrice lambda ne determinano il rango e i divisori elementari; reciprocamente, il rango e i divisori elementari determinano i fattori invarianti.

Esempio 4. Per la matrice lambda $A(\lambda)$, quadrata di ordine 6, rango 5, i divisori elementari siano

$$\lambda^3,\ \lambda^2,\ \lambda,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda-1,\ (\lambda+1)^2,\ \lambda+1$$

Trovare i fattori invarianti e scrivere la forma canonica di Smith.

Per ottenere $f_5(\lambda)$ formiamo il minimo comune multiplo dei divisori elementari, cioè:

$$f_5(\lambda) = \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

Per avere $f_4(\lambda)$ togliamo dal gruppo originale i divisori elementari usati in $f_5(\lambda)$ e troviamo il minimo comune multiplo dei rimanenti, cioè

$$f_4(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

Continuando allo stesso modo, $f_3(\lambda) = \lambda(\lambda-1)$. Ora i divisori elementari sono esauriti; allora $f_2(\lambda) = f_1(\lambda) = 1$. La forma canonica di Smith è

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Poiché i fattori invarianti di una matrice lambda sono invarianti per trasformazioni elementari, tali sono anche i divisori elementari, Perciò, .

IX. Due matrici lambda, quadrate di ordine n su $F[\lambda]$, sono equivalenti su detto campo solo ed unicamente se hanno lo stesso rango e gli stessi divisori elementari.

PROBLEMI RISOLTI

1. Dimostrare: Se $P(\lambda)$ è un prodotto di matrici elementari, il massimo comune divisore di tutti i minori quadrati di ordine s di $P(\lambda)\cdot A(\lambda)$ è anche massimo comune divisore di tutti i minori quadrati di ordine s di $A(\lambda)$.

Bisogna solo considerare $P(\lambda)\cdot A(\lambda)$, essendo $P(\lambda)$ ciascuno dei tre tipi di matrici elementari H.

Sia $R(\lambda)$ un minore quadrato di ordine s di $A(\lambda)$ e sia $S(\lambda)$ il minore quadrato di ordine s di $P(\lambda)\cdot A(\lambda)$ avente la stessa posizione di $R(\lambda)$. Consideriamo $P(\lambda) = H_{ij}$; il suo effetto su $A(\lambda)$ è (i) lascia $R(\lambda)$ immutata, (ii) scambia due righe di $R(\lambda)$, oppure (iii), scambia una riga di $R(\lambda)$ con una riga non di $R(\lambda)$. Nel caso (i), $S(\lambda) = R(\lambda)$; nel caso (ii), $S(\lambda) = -R(\lambda)$; in (iii), $S(\lambda)$ è un altro minore quadrato di ordine s di $A(\lambda)$, a parte forse il segno.

Consideriamo $P(\lambda) = H_i(k)$; è allora o $S(\lambda) = R(\lambda)$ o $S(\lambda) = kR(\lambda)$.

Infine si consideri $P(\lambda) = H_{ij}(f(\lambda))$. L'effetto su $A(\lambda)$ può essere: (i) lascia $R(\lambda)$ immutata; (ii) aumenta una delle righe di $R(\lambda)$ di $f(\lambda)$ volte un'altra riga di $R(\lambda)$, oppure (iii) aumenta una delle righe di $R(\lambda)$ di $f(\lambda)$ volte una riga non di $R(\lambda)$. Nei casi (i) e (ii), $S(\lambda) = R(\lambda)$; nel caso (iii),

$$S(\lambda) = R(\lambda) \pm f(\lambda)\cdot T(\lambda)$$

in cui $T(\lambda)$ è un minore quadrato di ordine s di $A(\lambda)$.

Perciò ogni minore quadrato di ordine s di $P(\lambda)\cdot A(\lambda)$ è una combinazione lineare di minori, dello stesso tipo, di $A(\lambda)$. Se $g(\lambda)$ è il massimo comune divisore di tutti i minori quadrati di ordine s di $A(\lambda)$, e $g_1(\lambda)$ è il massimo comune divisore di tutti i minori dello stesso tipo di $P(\lambda)\cdot A(\lambda)$, $g(\lambda)$ divide $g_1(\lambda)$. Sia $B(\lambda) = P(\lambda)\cdot A(\lambda)$.

Ora, $A(\lambda) = P^{-1}(\lambda)\cdot B(\lambda)$ e $P^{-1}(\lambda)$ è un prodotto di matrici elementari. Perciò $g_1(\lambda)$ divide $g(\lambda)$, e $g_1(\lambda) = g(\lambda)$.

2. Dimostrare che se $P(\lambda)$ e $Q(\lambda)$ sono dei prodotti di matrici elementari, il massimo comune divisore di tutti i minori quadrati di ordine s di $P(\lambda)\cdot A(\lambda)\cdot Q(\lambda)$ lo è anche di tutti i minori, quadrati di ordine s, di $A(\lambda)$.

Sia $B(\lambda) = P(\lambda)\cdot A(\lambda)$ e $C(\lambda) = B(\lambda)\cdot Q(\lambda)$. Poiché $C'(\lambda) = Q'(\lambda)\cdot B'(\lambda)$ e $Q'(\lambda)$ è un prodotto di matrici elementari, il massimo comune divisore di tutti i minori quadrati di ordine s di $C'(\lambda)$ lo è anche di tutti i minori di $B'(\lambda)$, dello stesso tipo. Ma il massimo comune divisore di tutti i minori, quadrati di ordine s, di $C'(\lambda)$ lo è ancora per tutti i minori, dello stesso tipo, di $C(\lambda)$ e lo stesso vale per $B'(\lambda)$ e $B(\lambda)$. Perciò, il massimo comune divisore di tutti i minori quadrati di ordine s di $C(\lambda) = P(\lambda)\cdot A(\lambda)\cdot Q(\lambda)$ lo è anche di tutti i minori, dello stesso tipo, di $A(\lambda)$.

3. Dimostrare che ogni matrice lambda $A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)]$ di rango r può essere ridotta, tramite trasformazioni elementari, alla forma normale di Smith

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_r(\lambda) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

in cui ogni $f_i(\lambda)$ è monico, e divide $f_{i+1}(\lambda)$, $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$.

Il teorema è vero per $A(\lambda) = 0$. Supponiamo $A(\lambda) \neq 0$; esiste allora un elemento $a_{ij}(\lambda) \neq 0$ di grado minimo. Per mezzo di una trasformazione del tipo 2 questo elemento può essere reso monico e, con opportuni scambi di righe e di colonne, può essere spostato nella posizione (1, 1) della matrice, divenendo il nuovo $a_{11}(\lambda)$.

(*a*) Supponiamo che $a_{11}(\lambda)$ divida ogni altro elemento di $A(\lambda)$. Allora con trasformazioni del tipo 3, $A(\lambda)$ si può ridurre a

$$\text{(i)} \qquad \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{bmatrix}$$

in cui $f_1(\lambda) = a_{11}(\lambda)$.

(*b*) Poniamo che $a_{11}(\lambda)$ non divida ogni elemento di $A(\lambda)$. Sia $a_{1j}(\lambda)$ un elemento della prima riga non divisibile per $a_{11}(\lambda)$. Per il Teorema I del cap. 23 possiamo scrivere

$$a_{1j}(\lambda) = q(\lambda)\, a_{11}(\lambda) + r_{1j}(\lambda)$$

in cui $r_{1j}(\lambda)$ è di grado minore di quello di $a_{11}(\lambda)$. Sottraiamo alla *j*-ma colonna il prodotto di $q(\lambda)$ per la prima colonna, così che l'elemento della prima riga, *j*-ma colonna, sia ora $r_{1j}(\lambda)$. Con una trasformazione del tipo 2 sostituiamo questo elemento con uno che sia monico, e con uno scambio di colonne lo portiamo in posizione (1, 1) come nuovo $a_{11}(\lambda)$. Se adesso $a_{11}(\lambda)$ divide ogni elemento di $A(\lambda)$, procediamo fino ad ottenere (i). Altrimenti, dopo un numero finito di ripetizioni di detta procedura, otteniamo una matrice in cui ogni elemento della prima riga e della prima colonna è divisibile per l'elemento che occupa la posizione (1, 1).

Se questo elemento ne divide ogni altro in $A(\lambda)$, continuiamo fino ad ottenere la (i). Diversamente, supponiamo che $a_{ij}(\lambda)$ non sia divisibile per $a_{11}(\lambda)$. Sia $a_{i1}(\lambda) = q_{i1}(\lambda) \cdot a_{11}(\lambda)$ e $a_{1j}(\lambda) = q_{1j}(\lambda) \cdot a_{11}(\lambda)$. Sottraiamo alla *i*-ma riga il prodotto di $q_{i1}(\lambda)$ per la prima riga. Così si sostituisce $a_{i1}(\lambda)$ con 0, e $a_{ij}(\lambda)$ con $a_{ij}(\lambda) - q_{i1}(\lambda) \cdot a_{1j}(\lambda)$. Sommiamo la riga *i*-ma alla prima. Ciò lascia immutato $a_{11}(\lambda)$ ma sostituisce $a_{1j}(\lambda)$ con

$$a_{ij}(\lambda) - q_{i1}(\lambda) \cdot a_{1j}(\lambda) + a_{1j}(\lambda) = a_{ij}(\lambda) + q_{1j}(\lambda)\{1 - q_{i1}(\lambda)\}\, a_{11}(\lambda)$$

Questo non è divisibile, ma ugualmente lo dividiamo, per $a_{11}(\lambda)$; il resto – nuova sostituzione, come fatto prima – rimpiazza $a_{11}(\lambda)$. Si continua il procedimento finché il polinomio monico ultimo scelto quale $a_{11}(\lambda)$ non divide ogni elemento della matrice. Dopo un numero finito di passaggi dobbiamo ottenere una $a_{11}(\lambda)$ che divide ciascun elemento, giungendo così alla (i).

In appresso, trattiamo $B(\lambda)$ allo stesso modo, giungendo alla

$$\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & C(\lambda) \end{bmatrix}$$

Alla fine, avremo la forma normale di Smith.

Poiché $f_1(\lambda)$ è un divisore di ciascun elemento di $B(\lambda)$, e $f_2(\lambda)$ è il massimo comune divisore degli elementi di $B(\lambda)$, $f_1(\lambda)$ divide $f_2(\lambda)$. Similmente si trova che ogni $f_i(\lambda)$ divide $f_{i+1}(\lambda)$.

4. Ridurre

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ \lambda^3+2\lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+3\lambda^2+\lambda \\ \lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^2+2\lambda+1 & 3\lambda^2+6\lambda+3 \end{bmatrix}$$

alla forma normale di Smith.

Qui non è necessario ripetere il procedimento del Problema 3. L'elemento $f_1(\lambda)$ della forma normale di Smith è il massimo comune divisore degli elementi di $A(\lambda)$; chiaramente è 1. Procediamo subito per ottenere un simile elemento in posizione (1, 1), e avere la (i) del Problema 3. Dopo aver sottratto la seconda colonna alla prima, abbiamo

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ \lambda^2 & \lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+3\lambda^2+\lambda \\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 & 3\lambda^2+6\lambda+3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ 0 & \lambda & \lambda^3+\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^3+\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Ora, il massimo comune divisore degli elementi di $B(\lambda)$ è λ. Allora

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^3+\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}$$

e questa è la forma richiesta.

5. Ridurre in forma normale di Smith:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda-1 & \lambda+2 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda^2-2\lambda & \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda^2+\lambda-3 \end{bmatrix}$$

Troviamo:

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-2 & \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda^2+\lambda-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda-1 \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

usando le trasformazioni elementari $K_{12}(-1)$; $H_{21}(-\lambda)$, $H_{31}(-\lambda+2)$; $K_{21}(-\lambda+1)$, $K_{31}(-\lambda-2)$; $H_{23}(-1)$; $K_{23}(1)$; $H_{32}(\lambda+1)$, $H_2(-1)$; $K_{32}(-\lambda-1)$, $K_3(-1)$.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

6. Dimostrare che $H_{ij} K_{ij} = H_i(k) K_i(1/k) = H_{ij}(f(\lambda)) \cdot K_{ji}(-f(\lambda)) = I$.

7. Dimostrare che una matrice lambda $A(\lambda)$, quadrata di ordine n, è un prodotto di matrici elementari solo ed unicamente se $|A(\lambda)|$ è una costante non nulla.

8. Dimostrare che una matrice lambda $A(\lambda)$, quadrata di ordine n, si può ridurre alla I per mezzo di trasformazioni elementari solo ed unicamente se $|A(\lambda)|$ è una costante non nulla.

9. Dimostrare che una matrice lambda $A(\lambda)$ su $F[\lambda]$ quadrata di ordine n, possiede una inversa con elementi compresi in $F[\lambda]$ solo ed esclusivamente se $A(\lambda)$ è un prodotto di matrici elementari.

10. Si trovino delle matrici $P(\lambda)$ e $Q(\lambda)$ tali che $P(\lambda)\cdot A(\lambda)\cdot Q(\lambda) = I$ ricavando poi

$$A(\lambda)^{-1} = Q(\lambda)\cdot P(\lambda)$$

essendo data

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & \lambda \\ 2 & \lambda+2 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

Traccia: Vedere il Problema 6 del cap. 5. *Risp.*

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda+2 & -\lambda-1 \\ \lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-1 & -\lambda^2-\lambda+1 \\ -\lambda & -\lambda^2-3\lambda-2 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{bmatrix}$$

11. Ridurre ognuna delle seguenti matrici lambda alla forma normale di Smith:

$$(a)\quad \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+2\lambda & \lambda^2-1 \\ 2\lambda^2-2\lambda & \lambda^2-2\lambda & 2\lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$(b)\quad \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & \lambda^3+\lambda & 2\lambda^3-\lambda^2+\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2+1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ \lambda^2 & \lambda^3 & 2\lambda^3-\lambda^2+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+1 \end{bmatrix}$$

$$(c)\quad \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2\lambda-2 & \lambda-2 & \lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda+1 & 2\lambda^2-2\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda & \lambda^3 \\ \lambda^2-\lambda-2 & 3\lambda^2-7\lambda+4 & 2\lambda^2-5\lambda+4 & \lambda^3-2\lambda^2 \\ \lambda^3+\lambda^2 & 2\lambda^3-2\lambda^2 & \lambda^3-2\lambda^2 & \lambda^3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4-\lambda^3 \end{bmatrix}$$

$$(d)\quad \begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+\lambda \\ \lambda^2+\lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^3 & \lambda^2-1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 & \lambda^2 \\ \lambda^3+\lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 & \lambda^3+\lambda^2-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{bmatrix}$$

$$(e)\quad \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & \lambda^2+3\lambda+3 & \lambda^2+4\lambda-2 & \lambda^2+3 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda+2 & \lambda-2 \\ 3\lambda+1 & 4\lambda+3 & 2\lambda+2 & 3\lambda+2 \\ \lambda^2+2\lambda & \lambda^2+6\lambda+4 & \lambda^2+6\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda+3 \end{bmatrix} \sim I_4$$

$$(f)\quad \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

12. Ricavare i divisori elementari sul campo razionale, sul campo reale e sul campo complesso per ognuna delle matrici del Problema 11.

13. I seguenti polinomi sono fattori invarianti non triviali di una matrice. Trovarne i divisori elementari nel campo reale.

(*a*) $\lambda^2-\lambda,\ \lambda^3-\lambda^2,\ \lambda^6-2\lambda^5+\lambda^4$
(*b*) $\lambda+1,\ \lambda^2-1,\ (\lambda^2-1)^2,\ (\lambda^2-1)^3$
(*c*) $\lambda,\ \lambda^3+\lambda,\ \lambda^7-\lambda^6+2\lambda^5-2\lambda^4+\lambda^3-\lambda^2$
(*d*) $\lambda,\ \lambda^3+\lambda,\ \lambda^5+2\lambda^3+\lambda,\ \lambda^6+\lambda^5+2\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2+\lambda$

Risp. (*a*) $\lambda^4,\ \lambda^2,\ \lambda,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda-1,\ \lambda-1$
(*b*) $\lambda+1,\ \lambda+1,\ (\lambda+1)^2,\ (\lambda+1)^3,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^3$
(*c*) $\lambda,\ \lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^2+1,\ (\lambda^2+1)^2,\ \lambda-1$
(*d*) $\lambda,\ \lambda,\ \lambda,\ \lambda,\ \lambda^2+1,\ (\lambda^2+1)^2,\ (\lambda^2+1)^2,\ \lambda+1$

14. I seguenti polinomi sono i divisori elementari di una matrice di rango sei. Quali sono i suoi fattori invarianti?

(*a*) $\lambda,\ \lambda,\ \lambda+1,\ \lambda+2,\ \lambda+3,\ \lambda+4$
(*b*) $\lambda^3,\ \lambda^2,\ \lambda,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda-1$
(*c*) $(\lambda-1)^3,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda-1,\ (\lambda+1)^2$
(*d*) $\lambda^5,\ \lambda^3,\ \lambda,\ (\lambda+2)^5,\ (\lambda+2)^4,\ (\lambda+2)^2$

Risp. (*a*) $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \lambda,\ \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)$
(*b*) $1,\ 1,\ 1,\ \lambda,\ \lambda^2(\lambda-1),\ \lambda^3(\lambda-1)^2$
(*c*) $1,\ 1,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^3(\lambda+1)^2$
(*d*) $1,\ 1,\ 1,\ \lambda(\lambda+2)^2,\ \lambda^3(\lambda+2)^4,\ \lambda^5(\lambda+2)^5$

15. Risolvere il sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie

$$\begin{cases} Dx_1 + (D+1)x_2 = 0 \\ (D+2)x_1 - (D-1)x_3 = t \\ (D+1)x_2 + (D+2)x_3 = e^t \end{cases}$$

in cui x_1, x_2, x_3 sono funzioni reali incognite di una variabile reale t, e $D = \frac{d}{dt}$.
Traccia: Nella notazione matriciale, il sistema è

$$AX = \begin{bmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -D+1 \\ 0 & D+1 & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ e^t \end{bmatrix} = H$$

Ora, i polinomi in D di A si combinano nello stesso modo dei polinomi in λ di una matrice lambda; quindi, cominciando con uno schema di calcolo simile a quello del Problema 6, cap. 5, ed usando nell'ordine le trasformazioni elementari: $K_{12}(-1),\ H_1(-1),\ K_{21}(D+1),\ H_{21}(-D-2),\ H_{31}(D+1),\ K_{23}(D),\ H_{23}(-4),\ K_2(\frac{1}{2}),\ K_{32}(5D+7),\ H_{32}(-\frac{1}{2}D),\ H_3(2),\ K_3(1/5)$, si ottiene

$$PAQ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5D+6 & 1 & -4 \\ -5D^2-8D-2 & -D & 4D+2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(D+1) & \frac{1}{10}(5D^2+12D+7) \\ -1 & -\frac{1}{2}D & -\frac{1}{10}(5D^2+7D) \\ 0 & \frac{1}{2}D & \frac{1}{10}(5D^2+7D+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^2+\frac{9}{5}D+\frac{4}{5} \end{bmatrix} = N_1$$

forma normale di Smith per A.

Usiamo la trasformazione lineare $X = QY$ per portare $AX = H$ in $AQY = H$, e dalla $PAQY = N_1Y = PH$ otteniamo

$$y_1 = 0,\quad y_2 = t-4e^t,\quad (D^2+\tfrac{9}{5}D+\tfrac{4}{5})y_3 = 6e^t-1 \quad \text{e} \quad y_3 = K_1e^{-4t/5} + K_2e^{-t} + \tfrac{5}{3}e^t - \tfrac{5}{4}$$

Infine, usiamo la $X = QY$ per avere la soluzione richiesta

$$x_1 = 3C_1e^{-4t/5} + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{3}{8},\qquad x_2 = 12C_1e^{-4t/5} + C_2e^{-t} - \tfrac{1}{2},\qquad x_3 = -2C_1e^{-4t/5} + \tfrac{1}{3}e^t + \tfrac{1}{4}$$

CAPITOLO 25

Polinomio minimo di una matrice

LA MATRICE CARATTERISTICA $\lambda I - A$ di una matrice A quadrata di ordine n su F è una matrice lambda non singolare, con fattori invarianti e divisori elementari. Usando la (24.4) si dimostra facilmente:

I. Se D è una matrice diagonale, i divisori elementari di $\lambda I - D$ sono i suoi stessi elementi diagonali.

Nel Problema 1 si dimostra:

II. Due matrici quadrate A e B di ordine n su F sono simili su detto campo solo ed unicamente se le loro matrici caratteristiche hanno gli stessi fattori invarianti, o lo stesso rango e gli stessi divisori elementari, in $F[\lambda]$.

Dai Teoremi I e II si ha

III. Una matrice quadrata A di ordine n su F è simile ad una matrice diagonale solo ed esclusivamente se $\lambda I - A$ ha dei divisori elementari lineari in $F[\lambda]$.

INVARIANTI PER SIMILITUDINE. I fattori invarianti di $\lambda I - A$ si dicono invarianti per similitudine di A.

Siano $P(\lambda)$ e $Q(\lambda)$ delle matrici non singolari tali che $P(\lambda)\cdot(\lambda I - A)\cdot Q(\lambda)$ sia la forma normale di Smith

$$\text{diag}\,(f_1(\lambda),\ f_2(\lambda),\ \ldots,\ f_n(\lambda))$$

Ora, $|P(\lambda)\cdot(\lambda I - A)\cdot Q(\lambda)| \;=\; |P(\lambda)|\cdot|Q(\lambda)|\,\phi(\lambda) \;=\; f_1(\lambda)\cdot f_2(\lambda)\cdot\ldots\cdot f_n(\lambda)$.

Poiché $\phi(\lambda)$ e $f_i(\lambda)$ sono monici, $|P(\lambda)|\cdot|Q(\lambda)| = 1$ e abbiamo

IV. Il polinomio caratteristico di una matrice A quadrata di ordine n corrisponde al prodotto dei fattori invarianti di $\lambda I - A$, oppure degli invarianti per similitudine di A.

POLINOMIO MINIMO. Per il Teorema di Cayley-Hamilton (cap. 23) ogni matrice quadrata A di ordine n soddisfa la sua equazione caratteristica $\phi(\lambda) = 0$ di grado n. Il polinomio monico $m(\lambda)$ di grado minimo tale che sia $m(A) = 0$ si chiama polinomio minimo di A, e $m(\lambda) = 0$ si chiama equazione minima di A. ($m(\lambda)$ viene anche chiamata funzione minima di A).

Il procedimento più semplice per trovare il polinomio minimo di $A \neq 0$ comprende la seguente successione di operazioni:

(i) Se $A = a_0 I$, allora $m(\lambda) = \lambda - a_0$;

(ii) Se $A \neq aI$ per ogni a, ma $A^2 = a_1 A + a_0 I$, allora $m(\lambda) = \lambda^2 - a_1\lambda - a_0$;

(iii) Se $A^2 \neq aA + bI$ per ogni a e ogni b, ma $A^3 = a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I$, allora

$$m(\lambda) = \lambda^3 - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0$$

e così via.

Esempio 1. Trovare il polinomio minimo di $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Evidentemente $A - a_0 I = 0$ è impossibile. Poniamo

$$A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + a_0\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prendendo i primi due elementi della prima riga di ogni matrice, abbiamo $\begin{cases} 9 = a_1 + a_0 \\ 8 = 2a_1 \end{cases}$; allora $a_1 = 4$ e $a_0 = 5$. Dopo (e non prima) aver controllato ogni elemento di A^2, concludiamo che $A^2 = 4A + 5I$ e il polinomio minimo richiesto è $\lambda^2 - 4\lambda - 5$.

Nel Problema 2 si dimostra

V. Se A è una qualsiasi matrice quadrata di ordine n su F, e $f(\lambda)$ un polinomio qualsiasi su F, è $f(A) = 0$ solo ed unicamente se il polinomio minimo $m(\lambda)$ di A divide $f(\lambda)$.

Nel Problema 3 si dimostra invece

VI. Il polinomio minimo $m(\lambda)$ di una matrice quadrata A di ordine n è l'invariante per similitudine $f_n(\lambda)$ di A che ha il grado più alto.

Poiché tutti gli invarianti per similitudine $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_{n-1}(\lambda)$ dividono $f_n(\lambda)$, abbiamo

VII. Il polinomio caratteristico $\phi(\lambda)$ di A è il prodotto del polinomio minimo della stessa A e di alcuni fattori monici di $m(\lambda)$.

e ancora

VIII. La matrice caratteristica di una matrice quadrata A di ordine n ha dei divisori elementari, lineari, distinti, solo ed esclusivamente se $m(\lambda)$, polinomio minimo di A, comprende unicamente dei fattori lineari distinti.

MATRICI NON-DEROGATORIE. Una matrice quadrata A di ordine n, per la quale siano identici polinomio caratteristico e polinomio minimo, è chiamata non-derogatoria; altrimenti è derogatoria. Abbiamo

IX. Una matrice quadrata A di ordine n è non-derogatoria solo ed unicamente se essa ha solo un invariante per similitudine non triviale.

E' facile inoltre dimostrare:

X. Se B_1 e B_2 hanno come polinomi minimi rispettivamente $m_1(\lambda)$ e $m_2(\lambda)$ il polinomio minimo $m(\lambda)$ della somma diretta $D = \text{diag}(B_1, B_2)$ è il minimo comune multiplo di $m_1(\lambda)$ e $m_2(\lambda)$.

Questo risultato si può estendere alla somma diretta di m matrici.

XI. Siano $g_1(\lambda), g_2(\lambda), \ldots, g_m(\lambda)$ dei polinomi irriducibili, monici, distinti in $F[\lambda]$. Sia A_j una matrice non-derogatoria tale che $|\lambda I - A_j| = \{g_j(\lambda)\}^{a_j}$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Allora la $B = \text{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ ha $\phi(\lambda) = \{g_1(\lambda)\}^{a_1}\cdot\{g_2(\lambda)\}^{a_2}\cdots\{g_m(\lambda)\}^{a_m}$ sia come polinomio caratteristico che come polinomio minimo.

MATRICE ASSOCIATA. Sia A non-derogatoria, con invariante per similitudine non triviale

(25.1) $$g(\lambda) = f_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Definiamo quale matrice associata di $g(\lambda)$,

(25.2) $$C(g) = [-a], \qquad \text{se } g(\lambda) = \lambda + a$$

e, per $n > 1$:

$$(25.3) \qquad C(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \; \ldots & -a_{n-3} & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Nel Problema 4 dimostriamo:

XII. La matrice associata $C(g)$ di un polinomio $g(\lambda)$ ha quest'ultimo come polinomio sia caratteristico che minimo.

(Alcuni autori preferiscono definire $C(g)$ come trasposta della matrice data nella (25.3). Qui useremo entrambe le forme.)

Vedere il Problema 5.

E' facile dimostrare

XIII. Se A è non-derogatoria, con invariante per similitudine $f_n(\lambda) = (\lambda - a)^n$, allora

$$(25.4) \qquad J = [a], \text{ se } n = 1, \quad \text{e } J = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a \end{bmatrix}, \text{ se } n > 1 \quad \text{ha}$$

$f_n(\lambda)$ come polinomio caratteristico e minimo.

PROBLEMI RISOLTI

1. Dimostrare: Due matrici quadrate di ordine n, A e B su F, sono simili sullo stesso campo solo ed esclusivamente se le loro matrici caratteristiche hanno gli stessi fattori invarianti, o gli stessi divisori elementari in $F[\lambda]$.

Supponiamo che A e B siano simili. Dalla (i) del Problema 1, cap. 20, segue che $\lambda I - A$ e $\lambda I - B$ sono equivalenti. Allora per i Teoremi **VIII** e **IX** del cap. 24 essi hanno gli stessi fattori invarianti e gli stessi divisori elementari.

Reciprocamente, abbiamo $\lambda I - A$ e $\lambda I - B$ gli stessi fattori invarianti, o divisori elementari. Allora per il Teorema **VIII** del cap. 24 esistono delle matrici λ non singolari $P(\lambda)$ e $Q(\lambda)$ tali che

$$P(\lambda)\cdot(\lambda I - A)\cdot Q(\lambda) = \lambda I - B$$

ovvero

$$\text{(i)} \qquad P(\lambda)\cdot(\lambda I - A) = (\lambda I - B)\cdot Q^{-1}(\lambda)$$

Siano

$$\text{(ii)} \qquad P(\lambda) = (\lambda I - B)\cdot S_1(\lambda) + R_1$$

$$\text{(iii)} \qquad Q(\lambda) = S_2(\lambda)\cdot(\lambda I - B) + R_2$$

$$\text{(iv)} \qquad Q^{-1}(\lambda) = S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + R_3$$

in cui R_1, R_2, R_3 sono liberi da λ. Sostituendo in (i), abbiamo

$$(\lambda I - B)\cdot S_1(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + R_1(\lambda I - A) = (\lambda I - B)\cdot S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + (\lambda I - B)R_3$$

o

$$\text{(v)} \qquad (\lambda I - B)\{S_1(\lambda) - S_3(\lambda)\}(\lambda I - A) = (\lambda I - B)R_3 - R_1(\lambda I - A)$$

Allora $S_1(\lambda) - S_3(\lambda) = 0$, e

$$\text{(vi)} \qquad (\lambda I - B)R_3 = R_1(\lambda I - A)$$

dato che altrimenti il membro di sinistra della (v) è di grado almeno due, mentre il membro di destra è al più di grado uno.

Usando le (iii), (iv) e (vi):

$$\begin{aligned} I &= Q(\lambda)\cdot Q^{-1}(\lambda) \\ &= Q(\lambda)\{S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + R_3\} \\ &= Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + \{S_2(\lambda)\cdot(\lambda I - B) + R_2\}R_3 \\ &= Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + S_2(\lambda)\cdot(\lambda I - B)R_3 + R_2R_3 \\ &= Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + S_2(\lambda)\cdot R_1\cdot(\lambda I - A) + R_2R_3 \end{aligned}$$

ovvero

$$\text{(vii)} \qquad I - R_2R_3 = \{Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda) + S_2(\lambda)\cdot R_1\}(\lambda I - A)$$

Ora, $Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda) + S_2(\lambda)R_1 = 0$ e $I = R_2R_3$, perché altrimenti il membro di sinistra della (vii) è di grado zero in λ, mentre il membro di destra è per lo meno di grado uno. Perciò, $R_3 = R_2^{-1}$ e, dalla (vi),

$$\lambda I - B = R_1(\lambda I - A)R_2 = \lambda R_1R_2 - R_1AR_2$$

Dato che A, B, R_1, e R_2 sono esenti da λ, $R_1 = R_2^{-1}$; quindi $\lambda I - B = \lambda I - R_2^{-1}AR_2$, ed A e B sono simili, come si doveva dimostrare.

2. Dimostrare che se A è una qualsiasi matrice quadrata di ordine n su F, ed $f(\lambda)$ è un polinomio di $F[\lambda]$, è $f(A) = 0$ solo ed esclusivamente se il polinomio minimo $m(\lambda)$ di A divide $f(\lambda)$.

In base all'algoritmo della divisione (cap. 22),

$$f(\lambda) = q(\lambda)\cdot m(\lambda) + r(\lambda)$$

e allora

$$f(A) = q(A)\cdot m(A) + r(A) = r(A)$$

Poniamo $f(A) = 0$; allora $r(A) = 0$. Ora se $r(\lambda) \neq 0$, il suo grado è minore di quello di $m(\lambda)$, contrariamente all'ipotesi che $m(\lambda)$ sia il polinomio minimo di A. Perciò, $r(\lambda) = 0$ e $m(\lambda)$ divide $f(\lambda)$.

Reciprocamente, supponiamo che sia $f(\lambda) = q(\lambda)\cdot m(\lambda)$. Allora $f(A) = q(A)\cdot m(A) = 0$.

3. Dimostrare che il polinomio minimo $m(\lambda)$ di una matrice quadrata A di ordine n è quell'invariante per similitudine $f_n(\lambda)$ di A che possiede il grado più alto.

Indichi $g_{n-1}(\lambda)$ il massimo comune divisore dei minori quadrati di ordine $(n-1)$ di $\lambda I - A$. Allora

$$|\lambda I - A| = \phi(\lambda) = g_{n-1}(\lambda)\cdot f_n(\lambda)$$

e

$$\text{agg}(\lambda I - A) = g_{n-1}(\lambda)\cdot B(\lambda)$$

in cui il massimo comune divisore degli elementi di $B(\lambda)$ è 1.

Ora, $(\lambda I - A)\cdot \text{agg}(\lambda I - A) = \phi(\lambda)\cdot I$ così che

$$(\lambda I - A)\cdot g_{n-1}(\lambda)\cdot B(\lambda) = g_{n-1}(\lambda)\cdot f_n(\lambda)\cdot I$$

ovvero

$$\text{(i)} \qquad (\lambda I - A)\cdot B(\lambda) = f_n(\lambda)\cdot I$$

Allora $\lambda I - A$ è un divisore di $f_n(\lambda)\cdot I$ e, per il Teorema V del cap. 23, $f_n(A) = 0$.

Per il Teorema V, $m(\lambda)$ divide $f_n(\lambda)$. Poniamo

$$\text{(ii)} \qquad f_n(\lambda) = q(\lambda)\cdot m(\lambda)$$

Poiché $m(A) = 0$, $\lambda I - A$ è un divisore di $m(\lambda)\cdot I$, ovvero

$$m(\lambda)\cdot I = (\lambda I - A)\cdot C(\lambda)$$

Allora, applicando le (i) e (ii),

$$(\lambda I - A)\cdot B(\lambda) = f_n(\lambda)\cdot I = q(\lambda)\cdot m(\lambda)\cdot I = q(\lambda)\cdot(\lambda I - A)\cdot C(\lambda)$$

e

$$B(\lambda) = q(\lambda)\cdot C(\lambda)$$

Ora, $q(\lambda)$ divide ogni elemento di $B(\lambda)$; perciò $q(\lambda) = 1$ e, per la (ii),

$$f_n(\lambda) = m(\lambda)$$

come si doveva dimostrare.

4. Dimostrare che la matrice associata $C(g)$ di un polinomio $g(\lambda)$ ha quest'ultimo sia come polinomio caratteristico che come polinomio minimo.

La matrice caratteristica della (25.3) è

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Sommiamo alla prima colonna λ volte la seconda, λ^2 volte la terza, ... λ^{n-1} volte l'ultima per ottenere

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ g(\lambda) & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Poiché $|G(\lambda)| = g(\lambda)$, il polinomio caratteristico di $C(g)$ è $g(\lambda)$. Dato che il minore dell'elemento $g(\lambda)$ in $G(\lambda)$ è ± 1, massimo comune divisore di tutti i minori di $G(\lambda)$,quadrati di ordine $(n-1)$, è 1. Perciò $C(g)$ è non-derogatoria, ed ha per polinomio minimo $g(\lambda)$.

5. La matrice associata di $g(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda - 5$ è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -6 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{o, se si preferisce,} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

6. Scrivere la matrice associata di ciascuno dei seguenti polinomi:

(a) $\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1$ (d) $\lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda$

(b) $(\lambda^2 - 4)(\lambda + 2)$ (e) $\lambda^2(\lambda^2 + 1)$

(c) $(\lambda - 1)^3$ (f) $(\lambda + 2)(\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8)$

Risp. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 16 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. Dimostrare che ogni matrice quadrata di ordine 2, $A = [a_{ij}]$, per la quale $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \neq 0$, è non-derogatoria.

8. Ridurre il $G(\lambda)$ del Problema 4 a $\text{diag}\,(1, 1, \ldots, 1, g(\lambda))$.

9. Per ciascuna delle seguenti matrici A, (i) trovare polinomio caratteristico e polinomio minimo, e (ii) elencare i fattori invarianti non triviali e i divisori elementari nel campo razionale.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & -6 & -3 & -6 \\ -3 & -3 & -4 & -3 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 & 3 & 8 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 4 & -1 & -6 \\ 4 & -2 & 4 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Risp. (a) $\phi(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$; i.f. $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$; e.d. $(\lambda-1), (\lambda-2), (\lambda-3)$

(b) $\phi(\lambda) = m(\lambda) = \lambda^3$; i.f. = e.d. = λ^3

(c) $\phi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$; i.f. $\lambda-1, (\lambda-1)(\lambda-2)$
$m(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$; e.d. $\lambda-1, \lambda-1, \lambda-2$

(d) $\phi(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-5)$; i.f. $\lambda+1, (\lambda+1)(\lambda-5)$
$m(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-5)$; e.d. $\lambda+1, \lambda+1, \lambda-5$

(e) $\phi(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2$; i.f. $\lambda, \lambda^2 - 4\lambda$
$m(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda$; e.d. $\lambda, \lambda, \lambda - 4$

(f) $\phi(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2(\lambda-1)$; i.f. $\lambda+1, \lambda^3 - \lambda$
$m(\lambda) = \lambda(\lambda^2-1)$; e.d. $\lambda, \lambda+1, \lambda+1, \lambda-1$

(g) $\phi(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)^2$; i.f. $\lambda, \lambda(\lambda+1)^2$
$m(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2$; e.d. $\lambda, \lambda, (\lambda+1)^2$

(h) $\phi(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-2)^2$; i.f. $\lambda-2, \lambda^2-\lambda-2, \lambda^2 - \lambda - 2$
$m(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$; e.d. $\lambda-2, \lambda-2, \lambda-2, \lambda+1, \lambda+1$

10. Dimostrare i Teoremi **VII** e **VIII**.

11. Dimostrare il Teorema **X**.

Traccia: $m(D) = \text{diag}\,(m(B_1), m(B_2)) = 0$ richiede $m(B_1) = m(B_2) = 0$; perciò $m_1(\lambda)$ e $m_2(\lambda)$ dividono $m(\lambda)$.

12. Dimostrare il Teorema **XI**.

13. Se A è quadrata di ordine n, e k è il minimo intero positivo per cui $A^k = 0$, A si dice nilpotente di indice k. Dimostrare che A è nilpotente di indice k solo ed unicamente se le sue radici caratteristiche sono tutte zero.

14. Dimostrare: (*a*) Le radici caratteristiche di una matrice idempotente A quadrata di ordine n sono 0 oppure 1.
(*b*) Il rango di A coincide con il numero di radici caratteristiche pari ad 1.

15. Siano A, B, C, D delle matrici quadrate di ordine n su F, con C e D non singolari. Dimostrare che esistono delle matrici non singolari P e Q tali che $PCQ = A$, $PDQ = B$ solo ed esclusivamente nel caso che $R(\lambda) = \lambda C - A$ e $S(\lambda) = \lambda D - B$ abbiano gli stessi fattori invarianti, o gli stessi divisori elementari.

Traccia: Seguire la dimostrazione del Problema 1, sostituendo similitudine con equivalenza.

16. Dimostrare: Se il polinomio minimo $m(\lambda)$ di una matrice A non singolare è di grado s, si può esprimere A^{-1} come polinomio scalare di grado $s - 1$ in A.

17. Per mezzo del polinomio minimo trovare l'inversa della matrice A nel Problema 9(*h*).

18. Dimostrare che ogni fattore lineare $\lambda - \lambda_i$ della $\phi(\lambda)$ è un fattore di $m(\lambda)$.

Traccia: Il teorema è conseguenza del Teorema **VII**; oppure si assuma il contrario, scrivendo $m(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)q(\lambda) + r,\ r \neq 0$. Allora $(A-\lambda_i I)q(A) + rI = 0$ e $A - \lambda_i I$ ha una inversa.

19. Con la $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dimostrare che il polinomio minimo non è il prodotto dei fattori distinti di $\phi(\lambda)$.

20. Dimostrare che se $g(\lambda)$ è un polinomio scalare in λ, $g(A)$ è singolare solo ed esclusivamente se il massimo comune divisore di $g(\lambda)$ e di $m(\lambda)$, polinomio minimo di A, è $d(\lambda) \neq 1$.

Traccia: (i) Poniamo $d(\lambda) \neq 1$ e applichiamo il Teorema **V** del cap. 22.
(ii) Poniamo $d(\lambda) = 1$ applicando il Teorema **IV** del cap. 22.

21. Dedurre dal Problema 20 che quando $g(A)$ è non singolare, $[g(A)]^{-1}$ si può esprimere quale polinomio in A, di grado minore di quello di $m(\lambda)$.

22. Dimostrare che se il polinomio minimo $m(\lambda)$ di A su F è irriducibile in $F[\lambda]$ ed è di grado s in λ, l'insieme di tutti i polinomi scalari in A, con coefficienti in F e grado $< s$ costituisce un campo.

23. Siano A e B delle matrici quadrate; indichiamo con $m(\lambda)$ e $n(\lambda)$ i polinomi minimi di AB e BA rispettivamente. Dimostrare che:
(*a*) $m(\lambda) = n(\lambda)$ quando A e B non sono contemporaneamente singolari.
(*b*) $m(\lambda)$ e $n(\lambda)$ differiscono al massimo di un fattore λ quando sia A che B sono singolari.

Traccia: $B\cdot m(AB)\cdot A = (BA)\cdot m(BA) = 0$ e $A\cdot n(BA)\cdot B = (AB)\cdot n(AB) = 0$.

24. Abbia A dimensione $m\times n$ e B dimensione $n\times m$, essendo $m > n$. Indichiamo con $\phi(\lambda)$ e $\psi(\lambda)$ rispettivamente i polinomi caratteristici di AB e BA. Dimostrare che $\phi(\lambda) = \lambda^{m-n}\psi(\lambda)$.

25. Sia X_i un vettore invariante, associato con una radice caratteristica semplice di A. Dimostrare che se A e B commutano, X_i è un vettore invariante di B.

26. Se le matrici A e B commutano, stabilire un teorema riguardante i vettori invarianti di B quando A abbia solo delle radici caratteristiche semplici.

CAPITOLO 26

Forme canoniche per similitudine

IL PROBLEMA. Nel cap. 25 si dimostrava che le matrici caratteristiche di due matrici simili, quadrate di ordine n, A e $R^{-1}AR$ su F hanno gli stessi fattori invarianti e gli stessi divisori elementari. In questo capitolo stabiliremo degli esempi tipici dell'insieme di tutte le matrici $R^{-1}AR$ che sono (i) semplici di struttura e (ii) hanno in evidenza o i fattori invarianti stessi o i divisori elementari. Queste matrici, quattro di numero, si chiamano forme canoniche di A. Esse corrispondono alla matrice canonica $N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ già introdotta per tutte le matrici di ordine $m\times n$ e rango r sotto equivalenza.

FORMA CANONICA RAZIONALE. Sia A una matrice quadrata di ordine n su F; supponiamo dapprima che la sua matrice caratteristica abbia solo un fattore invariante non triviale $f_n(\lambda)$. La matrice associata $C(f_n)$ di $f_n(\lambda)$ è simile ad A, come si dimostrava nel cap. 25. La definiamo ora quale forma canonica razionale S di tutte le matrici simili ad A.

Poniamo ora che la forma normale di Smith per $\lambda I - A$ sia

$$\text{diag}\,(1, 1, \ldots, 1, f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)) \tag{26.1}$$

con il fattore invariante non triviale $f_i(\lambda)$ di grado s_i, $(i = j, j+1, \ldots, n)$. Si definisce forma canonica razionale di tutte le matrici simili ad A:

$$S = \text{diag}\,(C(f_j), C(f_{j+1}), \ldots, C(f_n)) \tag{26.2}$$

Per dimostrare che A ed S hanno gli stessi invarianti per similitudine, notiamo che $C(f_i)$ è simile a $D_i = \text{diag}\,(1, 1, \ldots, 1, f_i(\lambda))$ e perciò S è simile a $\text{diag}(D_j, D_{j+1}, \ldots, D_n)$. Tramite una sequenza di scambi tra due righe e le due colonne corrispondenti, otteniamo S simile a

$$\text{diag}\,(1, 1, \ldots, 1, f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \ldots, f_n(\lambda))$$

Abbiamo così dimostrato

I. Ogni matrice quadrata A è simile alla somma diretta (26.2) delle matrici associate dei fattori invarianti non triviali di $\lambda I - A$.

Esempio 1. Gli invarianti per similitudine di A, non triviali sul campo razionale, siano

$$f_8(\lambda) = \lambda + 1, \quad f_9(\lambda) = \lambda^3 + 1, \quad f_{10}(\lambda) = \lambda^6 + 2\lambda^3 + 1$$

Allora

$$C(f_8) = [-1], \quad C(f_9) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C(f_{10}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$S \;=\; \operatorname{diag}\left(C(f_8),\, C(f_9),\, C(f_{10})\right) \;=\; \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è la forma del Teorema I richiesta.

Nota. L'ordine in cui sono disposte le matrici associate lungo la diagonale è irrilevante. Anche

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

usando la trasposta di ciascuna delle suddette matrici associate, è una forma alternata.

SECONDA FORMA CANONICA. La matrice caratteristica di A abbia come fattori invarianti non triviali i polinomi $f_i(\lambda)$ della (26.1). Poniamo che i divisori elementari siano potenze di t distinti polinomi irriducibili in $F[\lambda]$: $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \ldots, p_t(\lambda)$. Sia

$$\textbf{(26.3)} \qquad f_i(\lambda) \;=\; \{p_1(\lambda)\}^{q_{1i}}\{p_2(\lambda)\}^{q_{2i}}\ldots\{p_t(\lambda)\}^{q_{ti}}; \qquad (i = j, j+1, \ldots, n)$$

nella quale non è necessario che compaia ciascun fattore, dato che qualcuna delle q può essere zero. La matrice associata $C(p_k^{q_{ki}})$ di ciascun fattore presente ha $\{p_k(\lambda)\}^{q_{ki}}$ come unico invariante per similitudine non triviale; quindi $C(f_i)$ è simile a

$$\operatorname{diag}\left(C(p_1^{q_{1i}}),\, C(p_2^{q_{2i}}),\, \ldots,\, C(p_t^{q_{ti}})\right)$$

Abbiamo

II. Ogni matrice quadrata A su F è simile alla somma diretta delle matrici associate dei divisori elementari, su F, di $\lambda I - A$.

Esempio 2. Per la matrice A dell'Esempio 1, i divisori elementari sul campo razionale sono $\lambda+1,\ \lambda+1,\ (\lambda+1)^2,\ \lambda^2-\lambda+1,\ (\lambda^2-\lambda+1)^2$. Le rispettive matrici associate sono

$$[-1],\quad [-1],\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

e la forma canonica del Teorema II è

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

FORMA CANONICA DI JACOBSON. Sia A la matrice del paragrafo precedente; i divisori elementari della sua matrice caratteristica siano espressi in forma di potenze di polinomi irriducibili in $F[\lambda]$. Consideriamo un divisore elementare $\{p(\lambda)\}^q$. Se $q = 1$, usiamo $C(p)$, la matrice associata; se $q > 1$, costruiamo la

$$\textbf{(26.4)} \qquad C_q(p) \;=\; \begin{bmatrix} C(p) & M & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & C(p) & M & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & C(p) & M \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & C(p) \end{bmatrix}$$

in cui M è una matrice dello stesso ordine di $C(p)$, con elemento 1 nell'angolo inferiore sinistro e zeri altrove. La matrice $C_q(p)$ della (26.4), nell'intesa che sia $C_1(p) = C(p)$, si dice matrice iperassociata di $\{p(\lambda)\}^q$. Notare che nella (26.4) c'è una linea continua di 1 proprio sopra la diagonale.

Quando venga usata la matrice associata alternata $C'(p)$, matrice iperassociata di $\{p(\lambda)\}^q$ sarà

$$C_q(p) \;=\; \begin{bmatrix} C'(p) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ N & C'(p) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & N & C'(p) & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & C'(p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & N & C'(p) \end{bmatrix}$$

in cui N è una matrice dello stesso ordine di $C'(p)$ con l'elemento 1 nell'angolo superiore destro e zeri altrove. In questa forma si ha una linea continua di 1 proprio al di sotto della diagonale.

Esempio 3. Sia $\{p(\lambda)\}^q = (\lambda^2+2\lambda-1)^4$. Allora $C(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, e

$$C_q(p) \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Nel Problema 1 si dimostra che $C_q(p)$ ha $\{p(\lambda)\}^q$ come unico invariante per similitudine non triviale. Perciò $C_q(p)$ è simile a $C(p^q)$ e può sostituirla nella forma canonica del Teorema **II**. Abbiamo:

III. Ogni matrice quadrata A su F è simile alla somma diretta delle matrici iperassociate dei divisori elementari su F di $\lambda I - A$.

Esempio 4. Per la matrice A dell'Esempio 2, matrici iperassociate dei divisori elementari $\lambda+1$, $\lambda+1$ e $\lambda^2-\lambda+1$ sono le loro matrici associate; matrice iperassociata di $(\lambda+1)^2$ è $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, quella di $(\lambda^2-\lambda+1)^2$ è $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Perciò la forma canonica del Teorema **III** sarà:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

L'uso del termine "razionale" in relazione alla forma canonica del Teorema **I** è alquanto ingannevole. Lo si usava in origine ad indicare che nella determinazione della forma canonica sono necessarie soltanto delle operazioni razionali nel campo degli elementi di A. Ma questo vale anche naturalmente per le forme canoniche, introdotte in seguito, dei Teoremi **II** e **III**. Per contribuire ulteriormente alla confusione, la forma canonica del Teorema **III** viene chiamata talvolta forma canonica razionale.

FORMA CANONICA CLASSICA. I divisori elementari della matrice caratteristica di A siano potenze di polinomi lineari. La forma canonica del Teorema **III** è allora la somma diretta di matrici iperassociate di forma

$$(26.5) \qquad C_q(p) = \begin{bmatrix} a_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_i \end{bmatrix}$$

corrispondenti al divisore elementare $\{p(\lambda)\}^q = (\lambda - a_i)^q$. Vedere per un esempio il Problema 2.

Questo caso particolare di forma canonica del Teorema **III** è noto come forma canonica classica, o di Jordan. [Si noti che $C_q(p)$ nella **(26.5)** è il tipo J della **(25.4)**]. Abbiamo

IV. Sia $\mathfrak{F}$ il campo in cui il polinomio caratteristico di una matrice A si riduce in fattori, costituiti da polinomi lineari. Allora A è simile, su $\mathfrak{F}$, alla somma diretta di matrici iperassociate della forma **(26.5)**, corrispondendo ogni matrice ad un divisore elementare $(\lambda - a_i)^q$.

Esempio 5. Siano i divisori elementari di $\lambda I - A$ sul campo complesso: $\lambda - i$, $\lambda + i$, $(\lambda-i)^2$, $(\lambda+i)^2$.

$$\begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

Dal Teorema **IV** segue

V. Una matrice quadrata A di ordine n è simile ad una matrice diagonale solo ed esclusivamente se i divisori elementari di $\lambda I - A$ sono dei polinomi lineari, ovvero, solo ed esclusivamente se il polinomio minimo di A è prodotto di distinti polinomi lineari.

Vedere i Problemi 2-4.

RIDUZIONE IN FORMA CANONICA RAZIONALE. Concludendo questa discussione sulle forme canoniche, si dimostrerà che si può ridurre – almeno in teoria – una qualsiasi matrice quadrata di ordine n alla sua forma canonica razionale, senza conoscere in anticipo i fattori invarianti di $\lambda I - A$. Una trattazione leggermente diversa dell'argomento si può trovare in: Dickson L. E., *Modern Algebric Theories*, Benj. H. Sanborn, 1926. Qualche progresso dal punto di vista del puro calcolo si è fatto in Browne E. T., *American Mathematical Monthly*, vol. 48 (1940).

Avremo bisogno delle seguenti definizioni:

Se A è una matrice quadrata di ordine n, X è un vettore ad n dimensioni su F e $g(\lambda)$ è il polinomio monico di grado minimo in $F[\lambda]$, tale che $g(A)\cdot X = 0$, allora, rispetto ad A, il vettore X si dice appartenere a $g(\lambda)$.

Se rispetto ad A, il vettore X appartiene a un $g(\lambda)$ di grado p, i vettori $X, AX, A^2X, \dots, A^{p-1}X$ linearmente indipendenti si dicono costituire una catena, avente X come dominante.

Esempio 6. Sia $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. I vettori $X = [1,0,0]'$ e $AX = [2,1,1]'$ sono linearmente indipendenti, mentre $A^2X = X$. Allora $(A^2-I)X = 0$, e X appartiene al polinomio λ^2-1. Per $Y = [1,0,-1]'$, $AY = [-1,0,1]' = -Y$; perciò $(A+I)Y = 0$ ed Y appartiene al polinomio $\lambda+1$.

Se $m(\lambda)$ è il polinomio minimo di una matrice quadrata A di ordine n, è $m(A)\cdot X = 0$ per ogni vettore X ad n dimensioni. Perciò non può esistere una catena di lunghezza maggiore del grado di $m(\lambda)$. Per la matrice dell'Esempio 6, il polinomio minimo è λ^2-1.

Sia S la forma canonica razionale della matrice quadrata A di ordine n su F. Esiste allora su F una matrice R non singolare tale che

$$(26.6) \qquad R^{-1}AR = S = \text{diag}(C_j, C_{j+1}, \dots, C_n)$$

in cui, per convenienza, la $C(f_i)$ della **(26.2)** è stata sostituita con C_i. Assumeremo che C_i, matrice associata del fattore invariante

$$f_i(\lambda) = \lambda^{s_i} + c_{i,s_i}\lambda^{s_i-1} + \dots + c_{i2}\lambda + c_{i1}$$

sia di forma

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_{i1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_{i2} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -c_{i3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_{i,s_i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{is_i} \end{bmatrix}$$

Dalla (26.6) abbiamo

$$AR = RS = R\,\mathrm{diag}(C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) \tag{26.7}$$

La R sia separata in gruppi di colonne $R_j, R_{j+1}, \ldots, R_n$, così che R_i e C_i, $(i = j, j+1, \ldots, n)$, abbiano lo stesso numero di colonne. Dalla (26.7),

$$AR = A[R_j, R_{j+1}, \ldots, R_n] = [R_j, R_{j+1}, \ldots, R_n]\,\mathrm{diag}(C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) = [R_j C_j, R_{j+1}C_{j+1}, \ldots, R_n C_n]$$

e

$$AR_i = R_i C_i, \qquad (i = j, j+1, \ldots, n)$$

Indichiamo con $R_{i1}, R_{i2}, \ldots, R_{is_i}$ gli s_i vettori colonna di R_i e formiamo il prodotto

$$R_i C_i = [R_{i1}, R_{i2}, \ldots, R_{is_i}]\,C_i = [R_{i2}, R_{i3}, \ldots, R_{is_i}, -\sum_{k=1}^{s_i} R_{ik}c_{ik}]$$

Poiché

$$AR_i = A[R_{i1}, R_{i2}, \ldots, R_{is_i}] = [AR_{i1}, AR_{i2}, \ldots, AR_{is_i}] = R_i C_i$$

abbiamo

$$R_{i2} = AR_{i1}, \qquad R_{i3} = AR_{i2} = A^2 R_{i1}, \qquad \ldots, \qquad R_{is_i} = A^{s_i - 1}R_{i1} \tag{26.8}$$

e

$$-\sum_{k=1}^{s_i} c_{ik}R_{ik} = AR_{is_i} \tag{26.9}$$

Sostituendo nella (26.9) la (26.8) otteniamo

$$-\sum_{k=1}^{s_i} c_{ik}A^{k-1}R_{i1} = A^{s_i}R_{i1}$$

ovvero

$$(A^{s_i} + c_{is_i}A^{s_i-1} + \ldots + c_{i2}A + c_{i1}I)R_{i1} = 0 \tag{26.10}$$

Dalla definizione già data di C_i, la (26.10) si può scrivere

$$f_i(A)\cdot R_{i1} = 0 \tag{26.11}$$

La R_{i1} sia indicata con X_i, così che la (26.11) diventi $f_i(A)\cdot X_i = 0$; allora, poiché $X_i, AX_i, A^2X_i, \ldots, A^{s_i-1}X_i$ sono linearmente indipendenti, il vettore X_i appartiene al fattore invariante $f_i(\lambda)$. Perciò i vettori colonna di R_i sono i vettori della catena che ha per dominante X_i, il quale appartiene a $f_i(\lambda)$.

Riassumendo: le n colonne linearmente indipendenti di R che soddisfano la (26.2) consistono in $n-j+1$ catene

$$X_i, AX_i, \ldots, A^{s_i-1}X_i \qquad (i = j, j+1, \ldots, n)$$

i cui dominanti appartengono ai rispettivi fattori invarianti $f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$, e le cui lunghezze rispettano la condizione $0 < s_j \leq s_{j+1} \leq \ldots \leq s_n$.

Abbiamo

VI. Per una data matrice A quadrata di ordine n su F:

(i) sia X_n il dominante di una catena $\mathcal{C}_n$ di lunghezza massima per tutti i vettori ad n dimensioni su F;

(ii) sia X_{n-1} il dominante di una catena $\mathcal{C}_{n-1}$ di massima lunghezza (ogni membro della quale è linearmente indipendente dai precedenti membri e da quelli di $\mathcal{C}_n$) per tutti i vettori ad n dimensioni su F linearmente indipendenti dai vettori di $\mathcal{C}_n$;

(iii) sia X_{n-2} il dominante di una catena $\mathcal{C}_{n-2}$ di massima lunghezza (ogni membro della quale è linearmente indipendente dai membri precedenti e da quelli di $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{C}_{n-1}$) per tutti i vettori ad n dimensioni su F, linearmente indipendenti dai vettori di $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{C}_{n-1}$;

e così via. Allora, per

$$R = [X_j, AX_j, \ldots, A^{s_j-1}X_j;\; X_{j+1}, AX_{j+1}, \ldots, A^{s_{j+1}-1}X_{j+1};\; \ldots;\; X_n, AX_n, \ldots, A^{s_n-1}X_n]$$

$R^{-1}AR$ è la forma canonica razionale di A.

Esempio 7. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Prendiamo $X = [1, 0, 0]'$; allora $X, AX = [1, 1, 1]'$, $A^2X = [3, 5, 6]'$ sono linearmente indipendenti, mentre $A^3X = [14, 25, 30]' = 5A^2X - X$. Perciò $(A^3 - 5A^2 + I)X = 0$ ed X appartiene a $f_3(\lambda) = m(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 1 = \phi(\lambda)$. Prendendo

$$R = [X, AX, A^2X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

troviamo

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad AR = [AX, A^2X, A^3X] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 14 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 30 \end{bmatrix}$$

e

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = S$$

Qui A è non-derogatoria, con polinomio minimo $m(\lambda)$ irriducibile sul campo razionale. Ogni vettore a 3 dimensioni su questo campo appartiene a $m(\lambda)$ (vedere Problema 11), ed è dominante di una catena di lunghezza tre. La matrice R avente i vettori di ogni catena come vettori colonna è tale che $R^{-1}AR = S$.

Esempio 8. Sia $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Prendiamo $X = [1, -1, 0]'$; allora $AX = X$, ed X appartiene a $\lambda - 1$. Ora, $\lambda - 1$ non può essere il polinomio minimo $m(\lambda)$ di A. E' comunque un divisore di $m(\lambda)$ (vedere il Problema 11), e potrebbe essere un invariante per similitudine di A.

Prendiamo ora $Y = [1, 0, 0]'$. I vettori Y, $AY = [2, 1, 2]'$, $A^2Y = [11, 8, 8]'$ sono linearmente indipendenti, mentre $A^3Y = [54, 43, 46]' = 5A^2Y + 3AY - 7Y$. Perciò Y appartiene a $m(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 7 = \phi(\lambda)$. Il polinomio $\lambda - 1$ non è un invariante per similitudine; infatti, a meno che la prima scelta del vettore non competa ad un polinomio che potrebbe ragionevolmente essere la funzione minima, essa si deve considerare una falsa partenza. Il lettore può verificare che

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

quando

$$R = [Y, AY, A^2Y] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vedere i Problemi 5-6.

PROBLEMI RISOLTI

1. Dimostrare che la matrice $C_q(p)$ della (26.4) ha $\{p(\lambda)\}^q$ come unico invariante per similitudine non triviale.

Sia la $C_q(p)$ di ordine s. Minore dell'elemento nell'ultima riga, prima colonna di $|\lambda I - C_q(p)|$ è ± 1, quindi il massimo comune divisore di tutti i minori quadrati, di ordine $(s-1)$, di $\lambda I - C_q(p)$ è 1. Quindi i fattori invarianti di $\lambda I - C_q(p)$ sono $1, 1, \ldots, 1, f_s(\lambda)$. Ma $f_s(\lambda) = \{p(\lambda)\}^q$, poiché

$$\phi(\lambda) = \lambda I - C_q(p) = \lambda I - C(p)^q = \{p(\lambda)\}^q$$

2. La forma canonica (a) è quella dei Teoremi I e II, quando fattore invariante non triviale e divisore elementare sia $\lambda^4+4\lambda^3+6\lambda^2+4\lambda+1$. La forma canonica del Teorema III è la (b).

$$(a)\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{bmatrix} \qquad (b)\quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3. La forma canonica (a) è quella del Teorema I quando sono fattori invarianti $\lambda+2,\ \lambda^2-4,\ \lambda^3+3\lambda^2-4\lambda-12$ e divisori elementari $\lambda+2,\ \lambda+2,\ \lambda+2,\ \lambda-2,\ \lambda-2,\ \lambda+3$. Forma canonica sia per il Teorema II che per il III è la (b).

$$(a)\quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad (b)\quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

4. Ora la forma canonica (a) è quella del Teorema III. Divisori elementari sul campo razionale sono $\lambda+2,\ \lambda+2,\ (\lambda^2+2\lambda-1)^2,\ (\lambda^2+2\lambda-1)^3$ e fattori invarianti:

$$(\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda-1)^2, \qquad (\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda-1)^3$$

Forma canonica del Teorema I è la (b), e del II la (c).

$$(a)\quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(b)\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & -10 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -11 & 12 & 17 & -14 & -21 & -8 \end{bmatrix}$$

$$(c)\quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 9 & 4 & -9 & -6 \end{bmatrix}$$

5. Sia $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 & -1 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Prendiamo $X = [1,0,0,0,0,0]'$.

Allora $X,\ AX = [-2,1,1,1,1,1]',\ A^2X = [1,0,-1,0,0,-1]',\ A^3X = [-3,1,1,1,1,2]'$ sono linearmente indipendenti, mentre $A^4X = [1,0,-2,0,0,-2]' = 2A^2X - X$; X appartiene a $\lambda^4-2\lambda^2+1$. Proviamo ad assumere $m(\lambda) = \lambda^4-2\lambda^2+1$ e scriviamo X_6 come X.

Il vettore $Y = [0,0,0,1,0,0]'$ è linearmente indipendente dai membri della catena dominata da X_6, e $AY = [-1,0,1,-1,1,0]'$ è linearmente indipendente da Y e dai membri della catena. Ora $A^2Y = Y$, ed Y appartiene a λ^2-1. Poiché i due polinomi completano l'insieme di fattori invarianti non triviali, scriviamo X_5 come Y. Quando è

$$R = [X_5, AX_5, X_6, AX_6, A^2X_6, A^3X_6] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

forma canonica razionale di A.

Nota. Il vettore $Z = [0,1,0,0,0,0]'$ è linearmente indipendente dai membri della catena dominata da X_6, e $AZ = [3,0,-2,1,-2,0]'$ è linearmente indipendente da Z e dai membri della catena. Comunque, $A^2Z = [-1,1,0,0,0,1]' = -AX_6 + A^3X_6 + Z$; allora $(A^2-1)(Z-AX_6) = 0$, e $W = Z - AX_6 = [2,0,-1,-1,-1,-1]'$ appartiene a λ^2-1. Prendendo questo come X_5, possiamo formare un'altra R con cui ottenere la forma canonica razionale.

6. Sia $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. Prendiamo $X = [1,0,0,0,0]'$.

Allora $X,\ AX = [-2,1,-1,-1,-2]',\ A^2X = [1,1,-1,-1,0]'$ sono linearmente indipendenti, mentre $A^3X = [-1,2,-2,-2,0]' = 2A^2X - 3X$ ed X appartiene a $\lambda^3-2\lambda^2+3$. Assumiamo per tentativo che sia questo il polinomio minimo $m(\lambda)$ e chiamiamo X, X_5.

Quando in A la quarta colonna venga sottratta alla prima, abbiamo $[-1, 0, 0, 1, 0]'$; di qui, se $Y = [1, 0, 0, -1, 0]'$, $AY = -Y$, ed Y appartiene a $\lambda+1$. Di nuovo, se si sottrae alla terza la quarta colonna di A, abbiamo $[0, 0, -1, 1, 0]'$; quindi se $Z = [0, 0, 1, -1, 0]'$, $AZ = -Z$ e Z appartiene a $\lambda+1$. Poiché Y, Z e i membri della catena dominata da X_5 sono linearmente indipendenti, indichiamo Y con X_4 e Z con X_3.
Quando

$$R = [X_3, X_4, X_5, AX_5, A^2X_5] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R^{-1}AR = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

forma canonica razionale di A.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

7. Per ciascuna delle matrici (a)-(h) del Problema 9, cap. 25, scrivere la matrice canonica dei Teoremi **I, II, III** sul campo razionale. Qualcuna di queste matrici può essere cambiata dilatando il campo numerico?

Risp. parziale. (a) **I**, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}$; **II**, **III**, $\text{diag}(1, 2, 3)$

(b) **I**, **II**, **III**, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) **I**, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; **II**, **III**, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(f) **I**, $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; **II**, **III**, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(g) **I**, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$; **II**, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$; **III**, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(h) **I**, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; **II**, **III**, $\text{diag}(2, 2, 2, -1, -1)$

8. Sotto quali condizioni (a) saranno identiche le forme canoniche dei Teoremi **I** e **II**? (b) saranno identiche le forme canoniche dei Teoremi **II** e **III**? (c) sarà diagonale la forma canonica del Teorema **II**?

9. Identificare la forma canonica $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Controllare mediante la risposta al Problema 8(b).

10. La matrice non singolare A abbia i fattori invarianti non triviali (a) $\lambda+1,\ \lambda^3+1,\ (\lambda^3+1)^2$, (b) $\lambda^2+1,\ \lambda^4+5\lambda^2+4,\ \lambda^6+6\lambda^4+9\lambda^2+4$. Scrivere le forme canoniche dei Teoremi **I, II, III** sul campo razionale, e quella del Teorema **IV**.

Risp. (a)

I, $$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

II, $$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

III, $$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

IV, $$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$ in cui $\alpha, \beta = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$.

11. Dimostrare: Se rispetto ad una matrice quadrata A di ordine n il vettore X appartiene a $g(\lambda)$, lo stesso $g(\lambda)$ divide il polinomio minimo $m(\lambda)$ di A.
Traccia: Supporre il contrario, considerando $m(\lambda) = h(\lambda) \cdot g(\lambda) + r(\lambda)$.

12. Dimostrare nell'Esempio 6 che X, AX, Y sono linearmente indipendenti, riducendo quindi A in forma canonica razionale.

13. Nel Problema 6:
(*a*) Assumere $Y = [0, 1, 0, 0, 0]'$, linearmente indipendente dalla catena dominata da X_5, ottenendo $X_4 = Y - (3A - 2I)X_5$ che appartiene a $\lambda + 1$.
(*b*) Assumere $Z = [0, 0, 1, 0, 0]'$, linearmente indipendente da X_4 e dalla catena dominata da X_5, ottenendo $X_3 = Z - X_5$ che appartiene a $\lambda + 1$.
(*c*) Calcolare $R^{-1}AR$, usando i vettori X_3 e X_4 di (*b*) e (*a*), per ricavare R.

14. Per ciascuna delle matrici A del Problema 9 (*a*)-(*h*) del cap. 25, trovare una R tale che $R^{-1}AR$ sia la forma canonica razionale di A.

15. Risolvere il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -6x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 \\ \dfrac{dx_4}{dt} = -3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

in cui le x_i sono funzioni incognite della variabile reale t.
Traccia: Sia $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]'$, definiamo $\dfrac{dX}{dt} = \left[\dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, \dfrac{dx_3}{dt}, \dfrac{dx_4}{dt}\right]'$ e riscriviamo il sistema così:

$$\text{(i)} \qquad \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = AX + H$$

Dato che la trasformazione lineare non singolare $X = RY$ porta la (i) nella

$$\frac{dY}{dt} = R^{-1}ARY + R^{-1}H$$

scegliamo una R tale che $R^{-1}AR$ sia la forma canonica razionale di A. Il vettore elementare E_1 a 4 dimensioni che appartiene a $\lambda^3 - \lambda$, domina la catena $X_1 = E_1, AX_1, A^2X_1$, mentre E_4 fornisce $X_2 = E_4 - X_1 + 2AX_1$ che appartiene a $\lambda + 1$. Ora, con

$$R = [X_1, AX_1, A^2X_1, X_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 4 & -12 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ y_1 + y_3 \\ y_2 \\ -y_4 \end{bmatrix}$$

Allora

$$Y = \begin{bmatrix} C_1 + \frac{1}{2}t^2 \\ C_2e^t + C_3e^{-t} - t \\ -C_1 + C_2e^t - C_3e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 - 1 \\ C_4e^{-t} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = RY = \begin{bmatrix} 2C_1 + C_2e^t + 3(C_3+C_4)e^{-t} + t^2 - 2t + 1 \\ 2C_1 + 2C_2e^t + 2(3C_3+4C_4)e^{-t} + t^2 - 4t + 2 \\ -4C_1 - 2C_2e^t - 2(5C_3+6C_4)e^{-t} - 2t^2 + 6t - 4 \\ -2C_1 - C_2e^t - 5(C_3+C_4)e^{-t} - t^2 + 3t - 2 \end{bmatrix}$$

Indice analitico

Indice dei simboli

Volumi pubblicati:

1. Ayres, CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE
2. Edminister, CIRCUITI ELETTRICI
3. Ayres, EQUAZIONI DIFFERENZIALI
4. Spiegel, STATISTICA
5. Rosenberg, CHIMICA GENERALE
6. Spiegel, MECCANICA RAZIONALE
7. Di Stefano-Stubberud-Williams, REGOLAZIONE AUTOMATICA
8. Spiegel, ANALISI MATEMATICA
9. Ayres, MATRICI
10. Spiegel, MANUALE DI MATEMATICA
11. Lowenberg, CIRCUITI ELETTRONICI
12. Mendelson, ALGEBRA DI BOOLE E CIRCUITI DI COMMUTAZIONE
13. Spiegel, ANALISI VETTORIALE
14. Scheid, ANALISI NUMERICA
15. Spiegel, VARIABILI COMPLESSE
16. Lipschutz, CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
17. Abbott-Van Ness, TERMODINAMICA
18. Lipschutz, ALGEBRA LINEARE
19. Hughes-Gaylord, EQUAZIONI PER L'INGEGNERIA
20. McLean-Nelson, MECCANICA APPLICATA
21. Cashin-Lerner, RAGIONERIA 1
22. Seto, SISTEMI VIBRANTI
23. Stansfield, GENETICA
24. Giles, MECCANICA DEI FLUIDI E IDRAULICA
25. Tuma, ANALISI DELLE STRUTTURE
26. Spiegel, ANALISI DI FOURIER
27. Spiegel, TRASFORMATE DI LAPLACE
28. Nash, RESISTENZA DEI MATERIALI
29. Mase, MECCANICA DEI CONTINUI
30. Salvatore, MICROECONOMIA
31. Ayres, MATEMATICA GENERALE
32. Diulio, MACROECONOMIA
33. Van der Merwe, FISICA GENERALE
34. Hecht, OTTICA
35. Cashin-Lerner, RAGIONERIA 2
36. Seto, ACUSTICA
37. Hall-Holowenko-Laughlin, COSTRUZIONE DI MACCHINE
38. Hughes-Brighton, FLUIDODINAMICA
39. Lipschutz, TOPOLOGIA
40. Spiegel, PROBABILITÀ E STATISTICA
41. Metz, CHIMICA FISICA
42. Lipschutz, TEORIA DEGLI INSIEMI
43. Gottfried, PROGRAMMARE IN BASIC
44. Meislich-Nechamkin-Sharefkin, CHIMICA ORGANICA
45. Lipschutz-Poe, PROGRAMMARE IN FORTRAN
46. Ayres, ALGEBRA MODERNA
47. Spiegel, DIFFERENZE FINITE ED EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE
48. Edminister, ELETTROMAGNETISMO
49. Temes, COMUNICAZIONI ELETTRONICHE
50. Gautreau-Savin, FISICA MODERNA
51. Nasar, MACCHINE ELETTRICHE
52. Pitts-Sissom, TRASMISSIONE DEL CALORE
53. Beiser, SCIENZE DELLA TERRA
54. Lipschutz-Lipschutz, ELABORAZIONE DEI DATI
55. Dowling, MATEMATICA PER ECONOMISTI
56. Gottfried, INTRODUZIONE AI CALCOLI DI INGEGNERIA
57. Baumslag-Chandler, TEORIA DEI GRUPPI
58. Bronson, MODERNA INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI
59. Kaufman-Wilson, TECNOLOGIA ELETTRONICA
60. Bronson, RICERCA OPERATIVA
61. Lipschutz, MATEMATICA DI BASE PER IL CALCOLATORE
62. Wells, DINAMICA LAGRANGIANA
63. O'Malley, FONDAMENTI DI ANALISI DEI CIRCUITI
64. Lipschutz, GEOMETRIA DIFFERENZIALE
65. Scheid, IL CALCOLATORE E LA PROGRAMMAZIONE
66. Holtje, MARKETING
67. Tokheim, MICROPROCESSORI
68. Ullmann, METODI QUANTITATIVI NELLA GESTIONE AZIENDALE
69. Holtje, PUBBLICITÀ
70. Lipschutz, MATEMATICA DISCRETA
71. Salvatore, STATISTICA ED ECONOMETRIA
72. Kazmier, STATISTICA AZIENDALE
73. Orilia, INFORMATICA AZIENDALE
74. Newcomer, PROGRAMMARE IN COBOL STRUTTURATO
75. Gottfried, PROGRAMMARE IN PASCAL
76. Plastock-Kalley, COMPUTER GRAFICA
77. Monks, GESTIONE OPERATIVA DELL'IMPRESA
78. Spiegel, VARIABILI REALI
79. Beiser, SCIENZE FISICHE
80. Lipschutz, STRUTTURE DEI DATI
81. Goldberg-Jones-Sterbenz, PROGRAMMARE IN ASSEMBLY
82. Kuchel-Ralston, BIOCHIMICA
83. Bronson, OPERAZIONI SULLE MATRICI
84. Diulio, MONETA E BANCA
85. Cathey, DISPOSITIVI E CIRCUITI ELETTRONICI
86. Gottfried, PROGRAMMARE IN C

010095

ISBN 88-453-0006-4